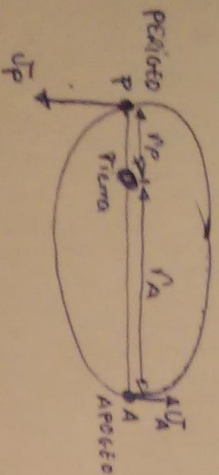


PROBLEMA N°1
GAUCIA 2016

Des satélites con diferente masa orbitan la Tierra. Las distancias al centro de la Tierra en apogeo y perigeo son las siguientes: para uno de ellos 70000 km y 30000 km, y para el otro 100000 km y 30000 km; repetitivamente. Si colisionan frontalmente en perigeo, con choque perfectamente inelástico, ¿cuál es la relación entre sus masas? Se supone que después del choque ambos satélites quedan unidos y en reposo.

Solución:



* Fuerza central $\Rightarrow \vec{L} = cte \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \text{ ley de Kepler}$
 $\Rightarrow \text{ley de las áreas: } \frac{1}{2} R_T \dot{\theta} = \frac{1}{2} r_p \dot{\theta}_p = \frac{1}{2} r_a \dot{\theta}_a$

$$\therefore \dot{\theta}_a = \frac{r_p}{r_a} \dot{\theta}_p$$

Área Tierra = Área satélite

* Fuerza conservativa $\Rightarrow E = cte = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$
 Energía: mecánica = cinética + potencial

$$\therefore \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GMm}{r_a} \quad \therefore v_p^2 - v_a^2 = 2GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$\therefore v_p^2 - \left(\frac{r_p}{r_a} \right)^2 v_p^2 = 2GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right) \Rightarrow v_p^2 \left[1 - \left(\frac{r_p}{r_a} \right)^2 \right] = 2GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right)$$

distancia de cada uno como suma x diferencia

$$\therefore v_p^2 \left(1 + \frac{r_p}{r_a} \right) \left(1 - \frac{r_p}{r_a} \right) = 2GM \frac{1}{r_p} \left(1 - \frac{r_p}{r_a} \right)$$

* Conservación del momento lineal:

$$\therefore v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p \left(1 + \frac{r_p}{r_a} \right)}} \quad m_1 v_{1p} = m_2 v_{2p} \quad \text{choque frontal con velocidad final nula}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{2p}}{v_{1p}} = \sqrt{\frac{\frac{2GM}{r_p \left(1 + \frac{r_p}{r_a} \right)}}{\frac{2GM}{r_p \left(1 + \frac{r_p}{r_a} \right)}}} = \sqrt{\frac{r_p}{r_p} \cdot \frac{1 + \frac{r_p}{r_a}}{1 + \frac{r_p}{r_a}}} = 1$$

$r_{1p} = 30000 \text{ km} = r_{2p} = r_p$
 $r_{1a} = 70000 \text{ km}$
 $r_{2a} = 100000 \text{ km}$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{r_p}{r_a}}{1 + \frac{r_p}{r_a}}} = \sqrt{\frac{\frac{r_p}{r_a}}{\frac{r_p}{r_a}}} = \sqrt{\frac{91}{100}} = \sqrt{0,91}$$

$\frac{m_2}{m_1} = 0,954$