Nº 3 FÍSICA CANTABRIA 2016

① Un motor de gasolina de 4 tiempos de 1800 cm^3 de cilindrada y una relación de compresión de 8 trabaja a 3000 rpm. Suponemos que el motor funciona como un ciclo de Otto (2 isócoras y 2 adiabáticas) y que la mezcla gaseosa que evoluciona es aire comportándose como gas perfecto. Las condiciones iniciales, antes de la compresión, son 100 kPa y 20°C. Si la combustión de la mezcla aporta un calor de 1,74 kJ/ciclo. Calcula:

a) Temperatura y presión en cada vértice del ciclo.

b) Trabajo y calor transferido en cada etapa.

c) Rendimiento y potencia generada.

Solución:

En principio, hemos de tener en cuenta:

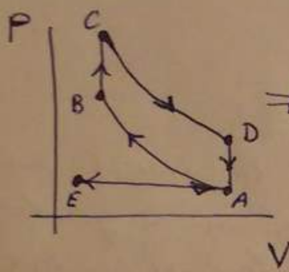
* Que el teorema de la equipartición de la energía nos lleva a: $C_v = \frac{f}{2} \cdot R$ donde f es el número de grados de libertad del movimiento molecular. Trabajamos con aire, mezcla compuesta fundamentalmente por dos gases diatómicos $(O_2 + N_2)$ y, por lo tanto, despreciando la activación de los grados de libertad vibracionales a las temperaturas de trabajo, tenemos $f = 3$ grados de libertad translacionales + 2 grados de libertad rotacionales $\Rightarrow f = 5 \therefore C_v = \frac{5}{2} R$. Si además tenemos en cuenta comportamiento de gas perfecto, se cumplirá la relación de Mayer para el calor específico molar a $P = cte$, C_p; y a $V = cte$, C_v: $C_p = C_v + R = \frac{5}{2} R + R = \frac{7}{2} R$

Entonces el índice adiabático para el aire será:

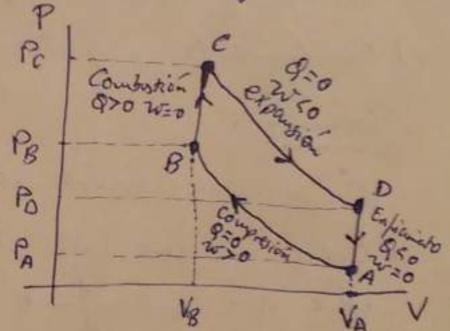
$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\cancel{7/2 R}}{\cancel{5/2 R}} = \frac{7}{5} = 1,4 \; ; \; \gamma - 1 = 1,4 - 1 = 0,4$$

* Por otro lado, en las dos transformaciones adiabáticas, se cumplirá la ecuación de las adiabáticas o ley de Poisson: $\boxed{PV^\gamma = cte}$, o bien, teniendo en cuenta que en los gases ideales $PV = nRT \therefore P = \frac{nRT}{V}$ y entonces $\frac{nRT}{V} \cdot V^\gamma = cte \therefore \boxed{T \cdot V^{\gamma-1} = \frac{cte}{nR} = C'te}$

Hemos admitido $n = cte$ (sistema cerrado) ya que, aunque se trata de un proceso abierto con admisión y expulsión de gases de escape, despreciaremos estos dos procesos A→E (admisión), E→A (escape), suponiéndolos idénticos y reversibles, ambos en sentido opuesto. Todo el calor y el trabajo que se intercambian en uno de ellos, se cancela con un término igual en valor absoluto pero de distinto signo en el otro proceso. Entonces nos imaginamos que es el mismo aire el que se comprime una y otra vez en el motor.



⇒ Despreciamos la admisión E→A y el escape A→E ⇒



* En el proceso B→C se produce la ignición y combustión de la mezcla y lo modelamos como si el aire intercambiara calor con un foco caliente a $V = cte$ (el pistón no se mueve y los gases absorben $1{,}74\ kJ = 1740\ J$). Análogamente en D→A suponemos que el aire intercambia calor en transformación isócora con un foco frío (el pistón no se mueve). Consideramos la expansión y la compresión muy rápidas de forma que al sistema no le da tiempo a intercambiar calor con el ambiente (transformaciones adiabáticas).
* Utilizaremos criterio IUPAC para los signos del trabajo W y calor Q.

- a) y b): relación de compresión $= r = \frac{V_A}{V_B} = 8$; $V_A = 1800\ cm^3 = 0{,}0018\ m^3$

  $P_A = 100\ kPa = 100000\ Pa$; $t_A = 20\,°C \rightarrow T_A = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\ K$

⊙ COMPRESIÓN ADIABÁTICA: A ⟶ B; $T_A \cdot V_A^{\gamma-1} = T_B \cdot V_B^{\gamma-1}$; $T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_A \cdot r^{\gamma-1}$;

$T_B = 293{,}15\ K \cdot 8^{0,4} = 673{,}4818455\ K \therefore \boxed{T_B = 673\ K}$; $P_A \cdot V_A^{\gamma} = P_B \cdot V_B^{\gamma} \therefore$

$\therefore P_B = P_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = P_A \cdot r^{\gamma} = 100\ kPa \cdot 8^{1,4} = 1837{,}917368\ kPa \therefore \boxed{P_B = 1838\ kPa}$

$\boxed{Q_{AB}=0}$ (adiabática) ; 1er ppio. termo. : $\Delta U = \cancel{Q_{AB}}^{0} + W_{AB}$ ∴

$$∴ W_{AB} = \Delta U = U_B - U_A = n\, C_v (T_B - T_A) = n \cdot \frac{5}{2} R (T_B - T_A) = \frac{5}{2} nR (T_A r^{\gamma-1} - T_A) =$$

$$= \frac{5}{2} \underbrace{nRT_A}_{P_A V_A} (r^{\gamma-1} - 1) = \frac{5}{2} P_A V_A (r^{\gamma-1} - 1) = \frac{5}{2}\, 100\,000 \frac{N}{m^2} \cdot 0{,}0018\, m^3 (8^{0,4} - 1) =$$

$$= 583{,}8285195\, J \;∴\; \boxed{W_{AB} = 584\, J}$$

⊙ COMBUSTIÓN ISÓCORA : $V_C = V_B = cte \Rightarrow \boxed{W_{BC} = 0}$; 1er ppio. termo $\Delta U = Q_{BC} + \cancel{W_{BC}}^{0}$

$\boxed{Q_{BC} = 1{,}74\, kJ = 1740\, J}$ $B \rightarrow C$

dato

$$; \; Q_{BC} = \Delta U = U_C - U_B = n\, C_v (T_C - T_B) = n \frac{5}{2} R (T_C - T_B) =$$

$$= \frac{5}{2} \underbrace{\frac{P_A V_A}{T_A}}_{nR} (T_C - T_B) \;∴\; T_C = \frac{2 T_A Q_{BC}}{5 P_A V_A} + \underbrace{T_B}_{T_A \cdot r^{\gamma-1}} = T_A \left(\frac{2 Q_{BC}}{5 P_A V_A} + r^{\gamma-1} \right) =$$

$$= 293{,}15\, K \left(\frac{2 \cdot 1740\, J}{5 \cdot 100\,000 \frac{N}{m^2} \cdot 0{,}0018\, m^3} + 8^{0,4} \right) = 1806{,}995179\, K \;∴\; \boxed{T_C = 1807\, K}$$

$$P_C \underbrace{V_C}_{V_B} = \underbrace{nR}_{\frac{P_A V_A}{T_A}} T_C \;∴\; P_C = \frac{P_A V_A T_C}{T_A V_B} = \frac{P_A \cdot r \cdot T_C}{T_A} = \frac{100\, kPa \cdot 8 \cdot 1806{,}995179\, K}{293{,}15\, K} =$$

$$= 4931{,}250702\, kPa \;∴\; \boxed{P_C = 4931\, kPa}$$

⊙ EXPANSIÓN ADIABÁTICA : $C \rightarrow D$; $\boxed{Q_{CD} = 0}$; $P_C \cdot V_C^{\gamma} = P_D \cdot V_D^{\gamma}$ ∴

$$∴ P_D = P_C \cdot \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma} = P_C \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma} = \frac{P_C}{r^{\gamma}} = \frac{4931{,}250702\, kPa}{8^{1,4}} = 268{,}3064423\, kPa$$

$$\boxed{P_D = 268\, kPa} \; ; \; T_C \cdot V_C^{\gamma-1} = T_D \cdot V_D^{\gamma-1} \;∴\; T_D = T_C \cdot \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} = T_C \cdot \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_C}{r^{\gamma-1}} =$$

$$= \frac{1806{,}995179\, K}{8^{0,4}} = 786{,}5403355\, K \;∴\; \boxed{T_D = 787\, K}$$

1er ppio. termo : $\Delta U = \cancel{Q_{CD}}^{0} + W_{CD}$ ∴ $W_{CD} = U_D - U_C = n\, C_v (T_D - T_C) =$

$$= n \frac{5}{2} R (T_D - T_C) = \frac{5}{2} \frac{P_A V_A}{T_A} (T_D - T_C) = \frac{5}{2} \cdot \frac{100\,000 \frac{N}{m^2} \cdot 0{,}0018\, m^3}{293{,}15\, K} \cdot (786{,}5403355 - 1806{,}995179)\, K =$$

$$= -1566{,}44953\, J \;∴\; \boxed{W_{CD} = -1566\, J}$$

⊙ ISÓCORA CON EL PISTÓN EN SU PTO. MÁS BAJO ($V_A = 1800\, cm^3$) ; $D \rightarrow A$; $\boxed{W_{DA} = 0}$

1er ppio. termo. : $\Delta U = Q_{DA} + \cancel{W_{DA}}^{0}$; $Q_{DA} = \Delta U = U_A - U_D = n C_v (T_A - T_D) = n \frac{5}{2} R (T_A - T_D) =$

$$= \frac{5}{2} \frac{P_A V_A}{T_A} (T_A - T_D) = \frac{5}{2} P_A V_A \left(1 - \frac{T_D}{T_A} \right) = \frac{5}{2}\, 100\,000 \frac{N}{m^2} \cdot 0{,}0018\, m^3 \left(1 - \frac{786{,}5403355}{293{,}15} \right) =$$

$$= -757{,}3789902\, J \;∴\; \boxed{Q_{DA} = -757\, J}$$

⊙ Validación : aplicamos el 1er principio de la termodinámica a todo el ciclo. Como la energía interna es función de estado $\Delta U = 0$

y entonces $\Delta \cancel{U_{ciclo}}^{0} = Q_{ciclo} + W_{ciclo}$

$Q_{ciclo} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = 0 + 1740 + 0 + (-757,379) = \underline{982,621\,J}$

$W_{ciclo} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 583,829 + 0 + (-1566,450) + 0 = \underline{982,621\,J}$

$Q_{ciclo} + W_{ciclo} = 982,621\,J + (-982,621\,J) = 0 = \Delta U_{ciclo}$ #

c) $\eta = \dfrac{|W_{ciclo}|}{Q_{absorbido}} = \dfrac{982,621\,\cancel{J}}{1740\,\cancel{J}} \Rightarrow \boxed{\eta = 0,5647 \Rightarrow 56,47\%}$

Se puede comprobar que el rendimiento solo depende de la razón de compresión: $\eta = \dfrac{|W_{ciclo}|}{Q_{absorbido}} = \dfrac{|-Q_{ciclo}|}{Q_{abs}} = \dfrac{\cancel{Q_{AB}}^{0} + Q_{BC} + \cancel{Q_{CD}}^{0} + Q_{DA}}{Q_{BC}} =$

$= 1 + \dfrac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \dfrac{\cancel{n c_v}(T_A - T_D)}{\cancel{n c_v}(T_C - T_B)} = 1 + \dfrac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$. Aplicando la ley de Poisson a sendas adiabáticas $\left\{ \begin{array}{l} T_D \cdot V_D^{\gamma-1} = T_C \cdot V_C^{\gamma-1} \\ T_A \cdot V_A^{\gamma-1} = T_B \cdot V_B^{\gamma-1} \end{array} \right\}$ teniendo en cuenta que $V_A = V_D$ y $V_B = V_C$ las ecuaciones quedan $\left\{ \begin{array}{l} T_D \cdot V_A^{\gamma-1} = T_C \cdot V_B^{\gamma-1} \\ T_A \cdot V_A^{\gamma-1} = T_B \cdot V_B^{\gamma-1} \end{array} \right\}$ dividiendo miembro a miembro se van los volúmenes: $\dfrac{T_D}{T_A} = \dfrac{T_C}{T_B}$, restando 1 en cada miembro $\dfrac{T_D}{T_A} - 1 = \dfrac{T_C}{T_B} - 1 \therefore \dfrac{T_D - T_A}{T_A} = \dfrac{T_C - T_B}{T_B} \therefore \dfrac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \dfrac{T_A}{T_B} \therefore$

$\therefore \dfrac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = -\dfrac{T_A}{T_B}$. Sustituyendo $\boxed{\eta = 1 - \dfrac{T_A}{T_B}}$ Puesto que $T_B < T_C = t^a_{máxima}$ alcanzada por el aire, concluimos que el ciclo de Otto tiene un rendimiento inferior al de Carnot que opere entre T_A y T_C (como era de esperar).

Volviendo a utilizar la ley de Poisson: $\dfrac{T_A}{T_B} = \left(\dfrac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \dfrac{1}{r^{\gamma-1}}$

Entonces $\boxed{\eta = 1 - \dfrac{T_A}{T_B} = 1 - \dfrac{1}{r^{\gamma-1}}} = 1 - \dfrac{1}{8^{0,4}} = \underline{0,5647 \Rightarrow 56,47\%}$ #

d) Para el cálculo de la potencia: en el ciclo $|W_{ciclo}| = 982,621\,J/ciclo$. El motor es de 4 tiempos, lo que significa que el pistón, en cada ciclo, hace dos subidas y dos bajadas. Cada subida + bajada del pistón, supone una revolución del eje del motor, entonces tenemos 2 revoluciones por ciclo:

$P = \dfrac{|W_{ciclo}|}{tiempo} = \dfrac{982,621\,J/ciclo}{2\ revoluciones/ciclo} \cdot 3000\ \dfrac{revoluciones}{\cancel{minuto} \cdot 60\,\frac{s}{\cancel{min}}} = 24565,525\,W$

$\boxed{P = 24,57\,kW}$ (Si dividimos los vatios entre 735,5 obtenemos los caballos de vapor = 33,4 C.V.)

Hemos de tener en cuenta que hemos trabajado con un modelo ideal, en realidad tanto el rendimiento η como la potencia P serán menores.