OPOSICIONES AL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Castilla La Mancha 2015

1. Sea la región R del plano definida por la parte positiva del los ejes coordenados y la curva

$$y = 2\cos x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\cdot$$

Halla el valor del parámetro a tal que la curva $y = a \operatorname{sen} x$ divida la región R en dos regiones de igual área.

RESOLUCIÓN:

La región R limitada por los semiejes positivos y la función $y = 2\cos x$, en el intervalo dado tiene un área dada por

$$\acute{A}rea = \int_0^{\pi/2} 2\cos x dx = [2\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = 2 - 0 = 2.$$

Para hallar los puntos de corte de estas curvas resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2\cos x \\ y = a\operatorname{sen} x \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad 2\cos x = a\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = \frac{2}{a},$$

luego en el primer cuadrante se cortan para el valor $x_0 = \operatorname{arctg}\frac{2}{a}\cdot$

Por tanto el área que deja por debajo la función $y = a\operatorname{sen} x$, entre 0 y x_0 junto con el área que deja por debajo la función $y = 2\cos x$, entre x_0 y $\frac{\pi}{2}$, debe sumar una unidad, es decir,

$$\int_0^{x_0} a\operatorname{sen} x dx + \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx = 1.$$

Integrando tenemos

$$1 = [-a\cos x]_0^{x_0} + [2\operatorname{sen} x]_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} = (-a\cos x_0 + a) + (2 - 2\operatorname{sen} x_0) = a(1 - \cos x_0) + 2(1 - \operatorname{sen} x_0).$$

Calculemos los valores del seno y el coseno a partir del valor de la tangente:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{a} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{4}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{4}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4 + a^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{a^2}{4 + a^2}.$$

Como el ángulo está en el primer cuadrante, seno y coseno son positivos, luego

$$\cos x = +\sqrt{\frac{a^2}{4 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{4 + a^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4 + a^2}} = \sqrt{\frac{4 + a^2 - a^2}{4 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 + a^2}},$$

resultando

$$1 = a\left(1 - \frac{a}{\sqrt{4+a^2}}\right) + 2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4+a^2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4+a^2} = a\left(\sqrt{4+a^2} - a\right) + 2\left(\sqrt{4+a^2} - 2\right),$$

es decir

$$\sqrt{4+a^2} = \sqrt{4+a^2}(a+2) - a^2 - 4,$$

o bien,

$$4 + a^2 = \sqrt{4+a^2}(a+1).$$

Elevando al cuadrado, queda

$$(4+a^2)^2 = (4+a^2)(a+1)^2$$

y simplificando, al ser $4 + a^2 \neq 0$, queda

$$4 + a^2 = a^2 + 2a + 1 \quad \Rightarrow \quad 2a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2}.$$

Así que hay una sola solución que es $a = \frac{3}{2}$.

2. Demostrar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

Para todo número $n \in \mathbb{N}$, se puede encontrar un conjunto de n números naturales consecutivos que no contiene ningún número primo.

Resolución:

La afirmación es verdadera. Un razonamiento intuitivo no dice que los números primos están cada vez más alejados unos de otros porque cada vez hay menos. Entre 4000 y 5000 habrá menos primos que entre 2000 y 3000 porque al buscar divisores entre estos mayores hay más primos entre los que dividirlos, así se eliminarán más números en la criba de Eratóstenes y quedarán menos primos. Por tanto, intuitivamente es lógico que haya más espacio entre unos primos y otros a medida que aumentan los números. Para números suficientemente grandes ese espacio podrá ser tan grande como queramos, intuitivamente es razonable.

Si queremos encontrar n números consecutivos que sean compuestos, pensamos que $(n+1)!$ es múltiplo de 2, de 3, de 4, . . . y de $(n+1)$, así que si le sumamos a este número otros que sean múltiplos de 2, de 3, de 4, . . . y de $(n+1)$, obtendremos números que seguirán siendo múltiplos de ellos. Basta con sumarles esos mismos números. Ya tenemos la demostración.

Dado el número $n \in \mathbb{N}$, consideramos los números

$$(n+1)! + 2, \quad (n+1)! + 3, \quad (n+1)! + 4, \quad ..., \quad (n+1)! + (n+1).$$

Estos números son consecutivos, hay exactamente n números, y el primero es múltiplo de 2 por ser suma de dos múltiplos de 2, el segundo es mútiplo de 3 por la misma razón, el tercero es múltiplo de 4, y así sucesivamente, siendo el último múltiplo de $(n+1)$. Es decir, estos n números son compuestos y consecutivos, no hay ningún primo entre ellos.

Esta es la demostración, pero para encontrar cuatro números compuestos consecutivos no será necesario ir a los números $(4+1)! + 2 = 122$, es decir, 122, 123 124 y 125, sino que en general habrá otros antes más pequeños.

3. En el triángulo acutángulo ABC, AH, AD y AM son, respectivamente, la altura, la bisectriz y la mediana que parten desde A, estando H, D y M en el lado BC. Si las longitudes AB, AC y MD son, respectivamente, 11, 8 y 1, calcula la longitud del segmento DH.

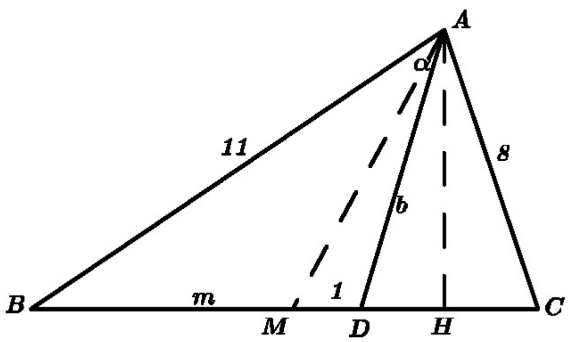
RESOLUCIÓN:

Sea m la mitad del lado BC, como M es el punto medio del lado, se tiene que

$$m = BM = MC \quad \text{y} \quad DH = m - 1 - HC.$$

Necesitamos calcular el valor de m y tener en cuenta que en el triángulo rectángulo $\triangle AHC$ es $HC = 8\cos\widehat{C}$.

Sea $b = AD$ la medida de la bisectriz en el triángulo y sea α el ángulo $\widehat{A}$, como se indica en la figura.



El teorema del coseno para un ángulo agudo cualquiera es $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, de donde es

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Aplicando el teorema del coseno al ángulo $\alpha/2$ en los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ se tienen las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2} &= \frac{11^2 + b^2 - (m+1)^2}{2\cdot 11\cdot b} \\ \cos\frac{\alpha}{2} &= \frac{8^2 + b^2 - (m-1)^2}{2\cdot 8\cdot b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{11^2 + b^2 - (m+1)^2}{11} = \frac{8^2 + b^2 - (m-1)^2}{8}$$

luego

$$8(120 + b^2 - m^2 - 2m) = 11(63 + b^2 - m^2 + 2m),$$

es decir

$$960 + 8b^2 - 8m^2 - 16m = 693 + 11b^2 - 11m^2 + 22m,$$

resultando la ecuación

$$3m^2 - 38m + 267 - 3b^2 = 0. \qquad (1)$$

Aplicamos el teorema del coseno al ángulo $\widehat{B}$ en el triángulo $\triangle ABC$ y en el triángulo $\triangle ABD$:

$$\begin{cases} \cos\widehat{B} = \dfrac{11^2+(2m)^2-8^2}{2\cdot 11\cdot 2m} = \dfrac{4m^2+57}{44m} \\ \\ \cos\widehat{B} = \dfrac{11^2+(m+1)^2-b^2}{2\cdot 11\cdot (m+1)} = \dfrac{m^2+2m+122-b^2}{22(m+1)} \end{cases}$$

igualando y simplificando por 22 queda

$$\frac{4m^2+57}{2m} = \frac{m^2+2m+122-b^2}{m+1},$$

de donde se obtiene

$$4m^3+4m^2+57m+57 = 2m^3+4m^2+244m-2b^2m,$$

es decir

$$2m^3-187m+57+2b^2m=0. \qquad (2)$$

Si aplicamos el teorema del coseno al ángulo $\widehat{C}$ en el triángulo $\triangle ABC$ y en el triángugulo $\triangle ABD$, obtenemos esta misma relación (2).

Multiplicamos la ecuación (1) por $2m$ y la ecuación (2) por 3, con el fin del eliminar el parámetro b, resultando

$$\begin{cases} 6m^3-76m^2+534m-6b^2m=0 \\ 6m^3-561m+171+6b^2m=0. \end{cases}$$

Sumando estas ecuaciones queda

$$12m^3-76m^2-27m+171=0,$$

ecuación de tercer grado que tiene raíces racionales, una obtenida ensayando divisores de 171 entre divisores de 12, y son

$$m=\frac{3}{2}, \qquad m=\frac{-3}{2}, \qquad m=\frac{19}{3}.$$

Desechamos la raíz negativa porque se trata de la mitad de la longitud del lado BC. Aplicando de nuevo el teorema del coseno al ángulo $\widehat{C}$ en el triángulo $\triangle ABC$ se tiene que

$$\cos\widehat{C} = \frac{8^2+(2m)^2-11^2}{2\cdot 8\cdot 2m} = \frac{4m^2-57}{32m},$$

así que la medida del segmento HC es

$$HC = 8\cos\widehat{C} = \frac{4m^2-57}{4m}$$

y para la raíz $m=\frac{3}{2}$ resulta

$$HC = \frac{9-57}{6} = \frac{-48}{6} = -8,$$

que tampoco es válida. Para la última raíz, $m=\frac{19}{3}$, queda

$$HC = \frac{4\cdot\frac{19^2}{9}-57}{\frac{4\cdot 19}{3}} = \frac{4\cdot 19^2-57\cdot 9}{9\left(\frac{4\cdot 19}{3}\right)} = \frac{1444-513}{12\cdot 19} = \frac{931}{12\cdot 19} = \frac{49}{12}.$$

El valor que nos piden es, por tanto,

$$DH = m-1-HC = \frac{19}{3}-1-\frac{49}{12} = \frac{76-12-49}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$