OPOSICIONES AL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Castilla y León 2015

1. Calcular la matriz, en la base canónica, de la transformación lineal T del espacio real tridimensional tal que:

a) La restricción de T al subespacio de ecuación $x+y-z=0$ es una homotecia de razón 4.

b) T transforma el subespacio $\left\{\begin{array}{c} 2x+4y+3z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$ en sí mismo.

c) $T(3,0,-1)=(6,-6,8)$.

RESOLUCIÓN:

El plano de ecuación $x+y-z=0$ tiene por ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda+\mu \\ y=\lambda \\ z=\qquad\mu \end{array}\right.$$

luego una base del plano está formada por los vectores $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$.

Como T es lineal, verifica que $T(\overrightarrow{0})=\overrightarrow{0}$, que es el centro de la homotecia, luego

$$\begin{aligned} T(-1,1,0) &= 4(-1,1,0)=(-4,4,0), \\ T(1,0,1) &= 4(1,0,1)=(4,0,4). \end{aligned}$$

Como por la condición c) es

$$T(3,0,-1)=(6,-6,8),$$

tenemos que resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{lll} -T(1,0,0)+T(0,1,0)+ & & =(-4,4,0) \\ \ \ T(1,0,0) & +T(0,0,1) & =(4,0,4) \\ 3T(1,0,0) & -T(0,0,1) & =(6,-6,8) \end{array}\right.$$

La suma de las dos últimas igualdades nos da $4T(1,0,0)=(10,-6,12)$, luego $T(1,0,0)=(\frac{5}{2},\frac{-3}{2},3)$.

Con este dato, en la primera ecuación se tiene que

$$T(0,1,0)=(-4,4,0)+(\tfrac{5}{2},\tfrac{-3}{2},3)=(\tfrac{-3}{2},\tfrac{5}{2},3)$$

y de la segunda ecuación resulta

$$T(0,0,1)=(4,0,4)-(\tfrac{5}{2},\tfrac{-3}{2},3)=(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},1).$$

La matriz de la aplicación tiene como columnas las imágenes de los vectores de la base, luego

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

El subespacio dado es una recta vectorial, de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} 2x + 4y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right.$$

que tiene como base $\{(1, 1, -2)\}$. El vector $\overrightarrow{v} = (1, 1, -2)$ se transforma por T en

$$T(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Este vector pertenece a la recta dada, ya que verifica las dos ecuaciones de la recta. Por tanto, la condición b) se cumple como consecuencia de las otras condiciones, siendo por ello redundante.

2. Hallar la parte entera de

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1\ 000\ 000}}$$

RESOLUCIÓN:

Consideramos el intervalo $[1, 10^6]$ y la partición

$$1 < 2 < 3 < \cdots < 10^6 - 1 < 10^6.$$

Consideramos la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ que es continua en ese intervalo, y por tanto integrable, y es decreciente. Las sumas de Riemann para esa función y la partición dada verfican que

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}} \leq \int_1^{10^6} \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6 - 1}} = S.$$

La diferencia entre estas sumas es

$$S - s = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{10^6}} = 1 - \frac{1}{1000} = 0,999.$$

Por otra parte, el valor de la integral es

$$\int_1^{10^6} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{10^6} x^{-1/2} dx = \left[2x^{1/2}\right]_1^{10^6} = 2\left(\sqrt{10^6} - \sqrt{1}\right) = 2(1000 - 1) = 1998$$

y se verifica que

$$s < 1998 < S \qquad \text{y que} \qquad s = S - 0,999 > 1998 - 0,999 > 1997.$$

Por tanto, el valor de s está en el intervalo $(1997, 1998)$.

Como la suma pedida es

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}} = 1 + s$$

y tenemos que $1 + s \in (1998, 1999)$, la parte entera del número pedido es 1998.

3. a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de las rectas que se apoyan en la circunferencia $C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ **y en la recta** $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ **y son paralelas al plano** $x = 0$.

b) Calcular el volumen determinado por la superficie del apartado anterior y el plano $z = 0$.

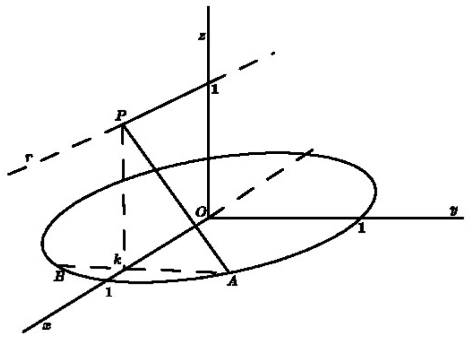
RESOLUCIÓN:

a) Sea $P = (k, 0, 1)$ un punto genérico de la recta r. Las rectas del lugar deben pasar por el punto P y por un punto $A = (k, \sqrt{1-k^2}, 0)$, o bien por el punto P y por un punto $B = (k, -\sqrt{1-k^2}, 0)$.

En el primer caso un punto genérico del lugar será

$$(x, y, z) = (k, 0, 1) + \lambda(0, \sqrt{1-k^2}, -1),$$

donde se ha elegido que pase por P y tenga por vector de dirección el vector $\overrightarrow{PA}$.



Escribiendo las paramétricas y hallando la ecuación implícita del lugar queda:

$$\left.\begin{array}{l} x = k \\ y = \lambda\sqrt{1-k^2} \\ z = 1 - \lambda \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} x = k \\ y = (1-z)\sqrt{1-k^2} \end{array}\right\} \quad y = (1-z)\sqrt{1-x^2}.$$

En el segundo caso el lugar será

$$(x, y, z) = (k, 0, 1) + \mu(0, -\sqrt{1-k^2}, -1),$$

por tanto resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x = k \\ y = -\mu\sqrt{1-k^2} \\ z = 1 - \mu \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} x = k \\ y = (z-1)\sqrt{1-k^2} \end{array}\right\} \quad y = (z-1)\sqrt{1-x^2}.$$

En conclusión, el lugar geométrico buscado está dado por la ecuación

$$y = \pm(1-z)\sqrt{1-x^2}.$$

b) Cortando el lugar geométrico con el plano $x = k$, $k \in [-1, 1]$, se tiene un triángulo cuya área es

$$A(k) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-k^2} \cdot 1 = \sqrt{1-k^2}.$$

Podemos hallar el volumen por secciones, con el cambio trigonométrico $x = \mathrm{sen}t$, resultando

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} A(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}\cos t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\mathrm{sen}2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

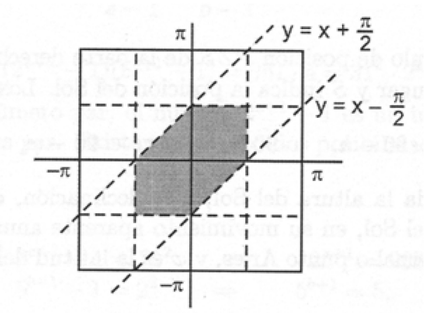
4. Calcular la probabilidad de que al elegir aleatoriamente tres puntos A, B y C sobre una circunferencia, los tres estén situados en un mismo arco de 90^o.

RESOLUCIÓN:

Sin perder generalidad podemos suponer que uno de los puntos corresponde a $0^{^o}$. Llamemos x, y a los ángulos correspondientes a los otros puntos. El espacio muestral está formado por los valores x, y comprendidos en el intervalo $[-\pi; \pi]$. Las condiciones del problema exigen que se cumplan simultáneamente las condiciones

$$|x| \le \frac{\pi}{2}, \qquad |y| \le \frac{\pi}{2}, \qquad |x-y| \le \frac{\pi}{2}.$$

Representando los puntos posibles y los que cumplen estas condiciones, que pueden verse en la figura,



y utilizando la regla de Laplace para probabilidades geométricas, se tiene que

$$\begin{aligned} P(\textit{mismo arco de } 90^o) &= P\left(\frac{-\pi}{2} \le x \le 0, \frac{-\pi}{2} \le y \le x + \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + P\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}, x - \frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{\textit{Área sombreada}}{\textit{Área total}} = \frac{3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{4\pi^2} = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$