OPOSICIONES AL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Madrid 2016

1. Dada la función

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} i^j \right),$$

demostrar que si p es primo, $p > 3$, entonces $f(p+1)$ es múltiplo de p.

RESOLUCIÓN:

Calculemos el valor de $f(p+1)$, se tiene

$$\begin{aligned} f(p+1) &= \sum_{j=1}^{p+1} 1^j + \sum_{j=1}^{p+1} 2^j + \sum_{j=1}^{p+1} 3^j + \cdots + \sum_{j=1}^{p+1} p^j + \sum_{j=1}^{p+1} (p+1)^j = \\ &= (p+1) + \frac{2^{p+2}-2}{2-1} + \frac{3^{p+2}-3}{3-1} + \cdots + \frac{p^{p+2}-p}{p-1} + \frac{(p+1)^{p+2}-(p+1)}{(p+1)-1} = \\ &= (p+1) + \frac{2(2^{p+1}-1)}{2-1} + \frac{3(3^{p+1}-1)}{3-1} + \cdots + \frac{p(p^{p+1}-1)}{p-1} + \frac{(p+1)[(p+1)^{p+1}-1]}{(p+1)-1}. \end{aligned}$$

Todos los paréntesis de los numeradores son divisibles por los denominadores, por lo que es resultado es un número natural. Para ver si es múltiplo de p, tomamos congruencias módulo p. Como $2, 3, ..., p-1$ son menores que p y p es primo y no divide a esos números, por el Pequeño Teorema de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 2^{p+1} &\equiv 2 \cdot 2^p \equiv 2 \cdot 2 \\ 3^{p+1} &\equiv 3 \cdot 3^p \equiv 3 \cdot 3 \\ &\vdots \\ (p-1)^{p+1} &\equiv (p-1)(p-1)^p \equiv (p-1)(p-1). \end{aligned}$$

Además, también es

$$\frac{p(p^{p+1}-1)}{p-1} \equiv p \equiv 0,$$

no por el Pequeño Teorema, sino por ser múltiplo de p. Nos falta el último sumando, utilizando el binomio de Newton resulta

$$\begin{aligned} \frac{(p+1)[(p+1)^{p+1}-1]}{p} &= \frac{p[(p+1)^{p+1}-1]}{p} + \frac{(p+1)^{p+1}-1}{p} = \\ &= [(p+1)^{p+1}-1] + \frac{(p+1)^{p+1}-1}{p} = \\ &= p^{p+1} + \binom{p+1}{p} p^p + \binom{p+1}{p-1} p^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} p + \binom{p+1}{0} - 1 + \\ &\quad + \frac{p^{p+1} + \binom{p+1}{p} p^p + \binom{p+1}{p-1} p^{p-1} + \cdots + \binom{p+1}{1} p + \binom{p+1}{0} - 1}{p} \\ &= kp + \frac{(p+1)p}{p} = kp + (p+1) \equiv p+1 \equiv 1, \end{aligned}$$

ya que las diferencias $\binom{p+1}{0} - 1$ son nulas, siendo kp un múltiplo de p.

Por tanto, queda

$$\begin{aligned} f(p+1) &\equiv (p+1) + \frac{2(2^2-1)}{2-1} + \frac{3(3^2-1)}{3-1} + \cdots + \frac{p(p^2-1)}{p-1} + (p+1) \equiv \\ &\equiv 2 + 2(2+1) + 3(3+1) + \cdots + p(p+1) \equiv \\ &\equiv 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (p-2)(p-1) + (p-1)p + p(p+1) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=1}^{p-2} i(i+1) \equiv \sum_{i=1}^{p-2} i^2 + i \equiv \sum_{i=1}^{p-2} i^2 + \sum_{i=1}^{p-2} i \equiv \\ &\equiv \frac{(p-2)(p-1)(2p-3)}{6} + \frac{(p-2)(p-1)}{3} \equiv \\ &\equiv \frac{(p-2)(p-1)(2p-3+3)}{6} \equiv \frac{p(p-1)(p-2)}{3}. \end{aligned}$$

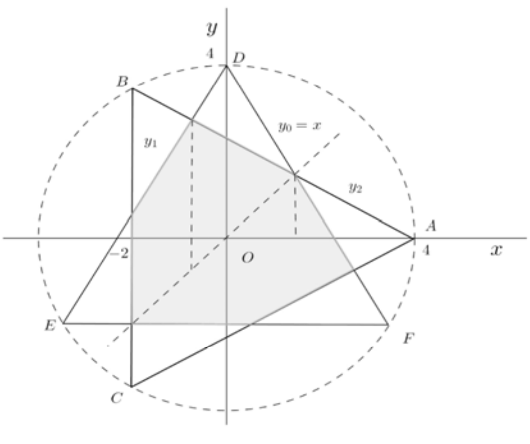
El resultado es un número entero porque el numerador contiene tres números consecutivos y por tanto un múltiplo de 3, además el cociente es un múltiplo de p, excepto en el caso en que sea $p = 3$, porque al simplificar no queda en el numerador otro múltiplo de 3, sino $2 \cdot 1 = 2$, que no es múltiplo de 3. Es decir, la fórmula es válida para $p > 3$.

2. Dado un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de centro O y radio 4 cm, se gira 90^o alrededor de O. Hallar el área común a ambos triángulos.

RESOLUCIÓN:

Sin pérdida de generalidad podemos colocar el triángulo de forma que su baricentro esté en el origen de coordenadas y uno de sus vértices en el semieje positivo de abscisas. Sea A este punto. Como el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo es de 4 cm, las coordenadas del punto son $A(4,0)$. Sean B y C los otros vértices cuyas coordenadas son $B(-2, 2\sqrt{3})$ y $C(-2, -2\sqrt{3})$, que pueden obtenerse fácilmente a partir de las del punto A mediante un giro de 120^o, es decir multiplicando por $\cos 120^o + i \operatorname{sen} 120^o = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ las coordenadas del punto A que son $4 + 0i$, y volviendo a multiplicar para tener otro giro.

Haciendo el giro de 90^o alrededor del origen, el punto A se transforma en el $D(0,4)$ y los otros puntos serán $E(-2\sqrt{3}, -2)$ y $F(2\sqrt{3}, -2)$, como se observa en la figura.



La zona común a ambos triángulos aparece sombreada y es simétrica respecto de la bisectriz $y = x$ por la simetría de las figuras. Calcularemos la zona común que queda por encima de la bisectriz y duplicaremos el área.

Sea y_0 la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero, su ecuación es $y = x$. Sea y_1 la recta que pasa por los puntos D y E, su ecuación es

$$y - 4 = \frac{4+2}{2\sqrt{3}}x \quad \Rightarrow \quad y = 4 + \sqrt{3}x.$$

Sea y_2 la recta que pasa por los puntos A y B, su ecuación es

$$y = \frac{2\sqrt{3}-0}{-2-4}(x-4) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x-4).$$

La recta que pasa por B y C tiene por ecuación $x = -2$. Las rectas y_1 e y_2 se cortan en

$$\left.\begin{array}{r} y = 4 + \sqrt{3}x \\ y = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x-4) \end{array}\right\} \quad 4 + \sqrt{3}x = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x-4) \quad \Rightarrow \quad 4x = 4(1-\sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad x = 1 - \sqrt{3}.$$

Las rectas y_2 e y_0 se cortan en

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ y = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x-4) \end{array}\right\} \quad x = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x-4) \quad \Rightarrow \quad (1+\sqrt{3})x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{1+\sqrt{3}}.$$

El área común a los dos triángulos es, por tanto

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{-2}^{1-\sqrt{3}} (y_1 - y_0)dx + 2\int_{1-\sqrt{3}}^{\frac{4}{1+\sqrt{3}}} (y_2 - y_0)dx = \\ &= 2\int_{-2}^{1-\sqrt{3}} (4 + \sqrt{3}x - x)dx + 2\int_{1-\sqrt{3}}^{\frac{4}{1+\sqrt{3}}} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}(x-4) - x\right) dx = \\ &= 2\int_{-2}^{1-\sqrt{3}} \left(4 + (\sqrt{3}-1)x\right) dx + 2\int_{1-\sqrt{3}}^{\frac{4}{1+\sqrt{3}}} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{(1+\sqrt{3})x}{\sqrt{3}}\right) dx = \\ &= 2\left[4x + \frac{(\sqrt{3}-1)x^2}{2}\right]_{-2}^{1-\sqrt{3}} + 2\left[\frac{4x}{\sqrt{3}} - \frac{(1+\sqrt{3})x^2}{2\sqrt{3}}\right]_{1-\sqrt{3}}^{\frac{4}{1+\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Operando se obtiene finalmente

$$A = 36 - 12\sqrt{3} \simeq 15,215.$$

Puede evitarse el uso de Cálculo integral sin más que hallar lo que miden el trapecio y el triángulo que quedan por encima de la bisectriz, para ello se deben calcular las medidas de los lados, lo que no es nada complicado.

3.a) Sea a un número real positivo. Hallar la longitud de la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

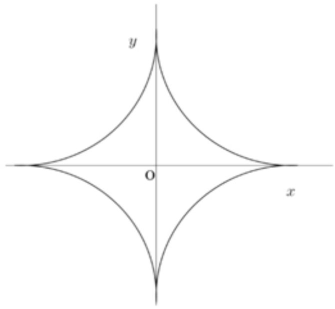
b) Sea $r > 1$ y f una función que en un entorno de cero verifica

$$|f(x)| \leq |x|^r.$$

Hallar la derivada de f en $x = 0$.

Resolución:

a) La ecuación dada corresponde a una *hipocicloide*, en concreto a la llamada *astroide*. Su ecuación, quitando denominadores es $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,



que para $x = 0$ es $y = \pm a$ y para $y = 0$ es $x = \pm a$, por lo que corta a los ejes a distancia igual a a y la longitud de la astroide será cuatro veces la que corresponde al primer cuadrante. Para hallar esta longitud pasamos a coordenadas paramétricas, siendo

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\operatorname{sen}^3 t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Las derivadas son

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3a\cos^2 t \cdot (-\operatorname{sen} t) \\ y'(t) &= 3a\operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t. \end{aligned}$$

La longitud en paramétricas correspondiente al primer cuadrante es

$$\begin{aligned} L_C &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3a\cos^2 t(-\operatorname{sen} t))^2 + (3a\operatorname{sen}^2 t\cos t)^2}dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} 3a\operatorname{sen} t\cos t\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}dt = \int_0^{\pi/2} 3a\operatorname{sen} t\cos t dt = \\ &= \left[3a\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}\left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^2 0\right) = \frac{3a}{2}(1-0) = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$

La longitud total de la astroide es, por tanto

$$L_T = 4L_C = 4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a.$$

b) Calculamos el valor de la función en el origen. Como $|f(0)| \leq 0^r \Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, la función se anula en cero, lo mismo que los límites en cero, por lo que la función es continua en el origen.

Para ver si es derivable calculamos la derivada por la derecha:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}.$$

Si es $h > 0$, se tiene que

$$|f(h)| \leq h^r \quad \Leftrightarrow \quad -h^r \leq f(h) \leq h^r \quad \Leftrightarrow \quad -h^{r-1} \leq \frac{f(h)}{h} \leq h^{r-1}.$$

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94

Esta doble desigualdad, llamando $\alpha = r - 1$, con $\alpha > 0$, queda

$$-h^\alpha \leq \frac{f(h)}{h} \leq h^\alpha.$$

Además, cuando $h \to 0^+$ existe el límite

$$\lim_{h\to 0^+} h^\alpha = \lim_{h\to 0^+} e^{\alpha \ln h} = 0,$$

por el principio de intercalación, o del sandwich, el límite siguiente existe y es nulo:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

De forma análoga calculamos la derivada por la izquierda:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h}.$$

Si es $h < 0$, se tiene que $-h > 0$, de donde

$$|f(h)| \leq (-h)^r \quad \Leftrightarrow \quad -(-h)^r \leq f(h) \leq (-h)^r \quad \Leftrightarrow \quad -(-h)^{r-1} \leq \frac{f(h)}{-h} \leq (-h)^{r-1}.$$

Llamando $\alpha = r - 1$, con $\alpha > 0$, queda

$$-(-h)^\alpha \leq \frac{f(h)}{-h} \leq (-h)^\alpha,$$

y cuando $h \to 0^-$ existe el límite

$$\lim_{h\to 0^-} (-h)^\alpha = \lim_{h\to 0^-} e^{\alpha \ln(-h)} = 0,$$

por tanto, el límite siguiente existe y es nulo:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{-h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Como coinciden la derivada por la derecha y la derivada por la izquierda, la función es derivable en $x = 0$ y la derivada toma el valor común a ambas derivadas laterales, que es 0.

4. Tres máquinas A, B, C producen una determinada pieza. La máquina A las elabora con una longitud que se distribuye según una normal de parámetros $\mu = 165$ y $\sigma = 5$, la máquina B las fabrica con una longitud que se distribuye según una distribución normal de parámetros $\mu = 175$ y $\sigma = 5$, y la máquina C también las hace con una longitud que se distribuye normalmente con $\mu = 170$ y $\sigma = 5$.

a) El 50% de la producción la hace la máquina A, el 20% de la producción la realiza la máquina B, y el resto la máquina C. Eligiendo tres piezas al azar y sabiendo que miden más de $173\ mm$, cada una, ¿cuál es probabilidad de que pertenezcan a la tercera máquina?

b) Eligiendo 100 piezas al azar de la máquina B, independientemente unas de otras, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 60 midan más de $173\ mm$?

(Nota: Se facilita una tabla de la normal).

RESOLUCIÓN:

a) Consideramos los sucesos

$$\begin{aligned} M_i &= \text{"}\textit{elegir la máquina } i\text{"}, \\ X_i &= \text{"}\textit{medida de la longitud de una pieza de la máquina } i\text{"}, \quad \text{con } i = A, B, C. \end{aligned}$$

Consultada la tabla de la normal y tipificando las variables resulta

$$\begin{aligned} P(X_A &> 173) = P\left(Z > \frac{173-165}{5}\right) = P(Z > 1,6) = 0,0548, \\ P(X_B &> 173) = P\left(Z > \frac{173-175}{5}\right) = P(Z > -0,4) = 0,6554, \\ P(X_C &> 173) = P\left(Z > \frac{175-170}{5}\right) = P(Z > 0,6) = 0,2742. \end{aligned}$$

La probabilidad de que las tres piezas elegidas al azar sean mayores que 173, como se eligen al azar, son independientes, es decir el producto, luego

$$P(\textit{tres de A mayores que 173}) = P(X_A > 173)P(X_A > 173)P(X_A > 173) = [P(X_A > 173)]^3,$$

y lo mismo para las otras máquinas:

$$\begin{aligned} P(\textit{tres de B mayores que 173}) &= P(X_B > 173)P(X_B > 173)P(X_B > 173) = [P(X_B > 173)]^3, \\ P(\textit{tres de C mayores que 173}) &= P(X_C > 173)P(X_C > 173)P(X_C > 173) = [P(X_C > 173)]^3. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Bayes resulta

$$P(M_C/miden > 173) = \frac{P(M_C)\,[P(X_C > 173)]^3}{P(M_A)[P(X_A > 173)]^3 + P(M_B)[P(X_B > 173)]^3 + P(M_C)[P(X_C > 173)]^3} =$$

$$= \frac{0,30 \cdot [0,2742]^3}{0,50 \cdot [0,0548]^3 + 0,20 \cdot [0,6554]^3 + 0,30 \cdot [0,2742]^3} = 0,09894.$$

b) Consideramos la variable aleatoria

$$X = \text{"}\textit{número de piezas que exceden de 173 en el lote de 100}\text{"}.$$

Se trata de una distribución binomial con 100 ensayos y probabilidad de éxito $p = 0,6554$. Como son $np = 100 \cdot 0,6554 = 65,54 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0,3446 = 34,46 > 5$, la distribución binomial $B(100; 0,6554)$ se puede aproximar con una normal de media $\mu = np = 65,54$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,6554 \cdot 0,3446} = 4,7523,$$

es decir por una $N(65,54; 4,7523)$, sea Y esta variable normal. Tipificando resulta

$$P(X \geq 60) = P(Y \geq 59,5) = P\left(Z \geq \frac{59,5 - 65,54}{4,7523}\right) = P(Z \geq -1,27) = P(Z < 1,27) = 0,8980.$$

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94