

PROBLEMA N°2
OPON MADRID 2016

Se tiene una distribución de carga positiva en el eje z , con densidad lineal de carga λ , tal que

$$\lambda = \alpha |z| \quad \text{si } -1 \leq z \leq 1 \quad \text{con } \alpha > 0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{en el resto.} \quad \begin{cases} z > 1 \\ z < -1 \end{cases}$$

a) Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del plano $z=0$.

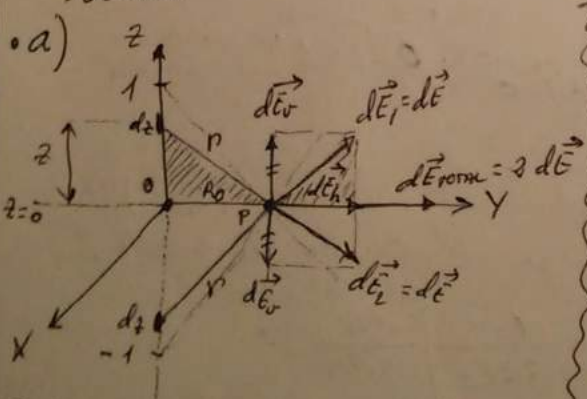
b) Calcular la velocidad v_0 que debe llevar un electrón de masa m_e y de carga q_e en el punto (x_0, y_0) para describir un movimiento circular respecto a $O(0,0,0)$ de radio R_0 .

c) Calcular el periodo de dicho movimiento

Datos: permitividad eléctrica del vacío: ϵ_0

Todos los datos tienen unidades en el Sistema Internacional.

Solución:



Imaginemos un punto en $y=R_0$, es decir, $(0, R_0, 0)$. Si rotamos dicho punto, en el plano XY , alrededor del eje z (siguiendo una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R_0^2$) ^{observamos} que el campo eléctrico en módulo no se va a modificar en módulo en cada

punto de la circunferencia y que su dirección siempre está en el plano XY radial, es decir, con la misma que el radio y sentido hacia fuera. Por lo tanto, estas circunferencias son las líneas de campo eléctrico en XY con campo constante.

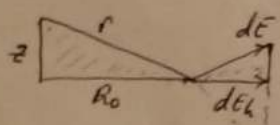
$d\vec{E}_1$ = campo eléctrico generado en P por dz sobre $(0, R_0, 0)$ por la distribución de carga sobre $z=0$

$d\vec{E}_2$ = campo eléctrico creado en P por dz sobre $(0, R_0, 0)$ por la distribución de carga debajo de $z=0$.

Las componentes verticales, $d\vec{E}_v$, de $d\vec{E}_1$ y $d\vec{E}_2$ se anulan (mismo módulo y dirección, diferentes sentidos). Y las horizontales, $d\vec{E}_h$, se suman (mismo módulo y dirección, sentidos iguales).

Entonces, en el punto P, el campo total será el doble de la componente horizontal generada por, por ejemplo, el tramo superior a $z=0$, es decir, $0 \leq z \leq 1$.

Aplicando el teorema de Tales a los dos triángulos rectángulos rayados en la primera figura:



$$\frac{dE}{r} = \frac{dE_h}{R_0} \therefore dE_h = R_0 \frac{dE}{r}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$dE = K \cdot \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dz}{r^2} = \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z dz}{R_0^2 + z^2}$$

$r^2 = R_0^2 + z^2$ (Pitágoras)
 $r = \sqrt{R_0^2 + z^2}$

$$\lambda = \frac{dq}{dz} \Rightarrow dq = \lambda dz$$

$$\lambda = a \cdot z$$

+ Consideramos distribución superior: $0 \leq z \leq 1$ no necesitamos valor absoluto

$$\therefore dE_h = R_0 \cdot \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \cdot dz}{(R_0^2 + z^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} = R_0 \cdot \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \cdot dz}{(R_0^2 + z^2)^{3/2}}$$

Antes de integrar, hacemos el siguiente cambio de variable,

$$u = z^2 + R_0^2$$

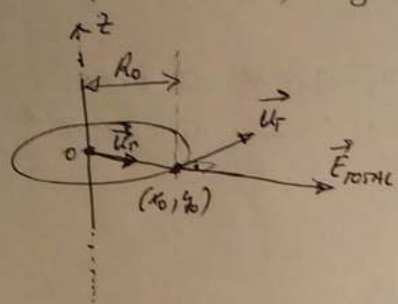
$$du = 2z dz \therefore z dz = \frac{du}{2} \quad \int_0^{E_h} dE_h = \frac{R_0 \cdot a}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_0^2}^{z^2 + R_0^2} \frac{du}{u^{3/2}} \therefore$$

$$\therefore E_h = \frac{R_0 \cdot a}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{u^{-1/2}}{(-1/2)} \Big|_{R_0^2}^{z^2 + R_0^2} = -\frac{R_0 \cdot a \cdot z}{2 \cdot 4 \cdot \pi \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + R_0^2/R^2}} - \frac{1}{R_0} \right)$$

$$= \frac{R_0 \cdot a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{\sqrt{1 + R_0^2}} \right) = \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R_0^2}} \right)$$

Como $|\vec{E}_{TOTAL}| = 3 E_h \Rightarrow \boxed{E_{TOTAL} = \frac{a}{2\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R_0^2}}}\right)}$

Si definimos un vector unitario radial \vec{u}_r (normal a la línea de campo circular) y tangencial \vec{u}_t (tangente a las líneas de campo circulares) según figura; queda claro cual es la dirección y sentido de \vec{E}_{TOTAL} en las líneas de campo:



$\boxed{\vec{E}_{TOTAL} = \frac{a}{2\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R_0^2}}}\right) \vec{u}_r}$

Esta ecuación solamente es válida si todos nuestros datos vienen expresados en el Sistema Internacional:

R_0 = en m de distancia al punto O (origen de coordenadas).

a = en C/m

ϵ_0 = permitividad en el vacío, en ~~N.m²~~ $\frac{C^2}{N.m^2}$ ó F/m

$|\vec{E}_{TOTAL}| = E_{TOTAL}$ = vector expresado en N/C ó V/m

L = longitud de la distribución de carga = 2m

- b) Para seguir un movimiento circular y uniforme con velocidad v_0 el electrón ha de entrar en dirección tangencial a la línea de campo eléctrico que pase por (x_0, y_0) :

$\boxed{\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_t}$ y estar sometido a una fuerza centrípeta hacia el origen de coordenadas que cumpla la 2ª ley de Newton:

$\vec{F} = m \vec{a}$; $F_c = m_e a_c = m_e \cdot \frac{v_0^2}{R_0}$. Fuerza que será la debida al campo eléctrico:

$F_e = |q_e| E_{TOTAL}$. Igualando $F_c = F_e \Rightarrow m_e \frac{v_0^2}{R_0} = |q_e| E_{TOTAL}$

$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{R_0 |q_e| E_{TOTAL}}{m_e}}}$

donde E_{TOTAL} viene dada por la expresión calculada líneas arriba en el apartado a)

$$c) v_o = w \cdot R_o = \frac{2\pi}{T} R_o \therefore \boxed{T = \frac{2\pi R_o}{v_o}}$$

↑
período

Donde v_o viene dada por la expresión calculada en b).

PROBLEMA N°3
OPES MADRID 2016

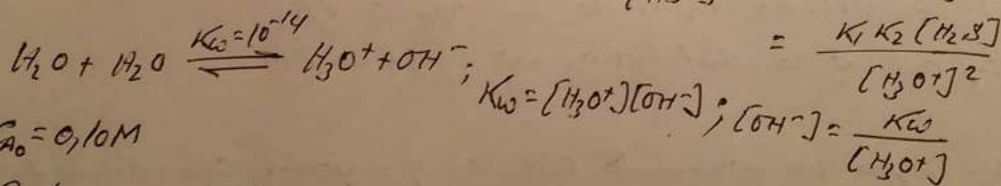
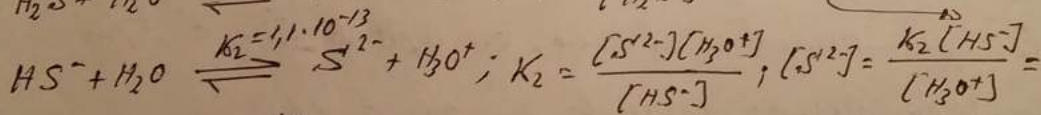
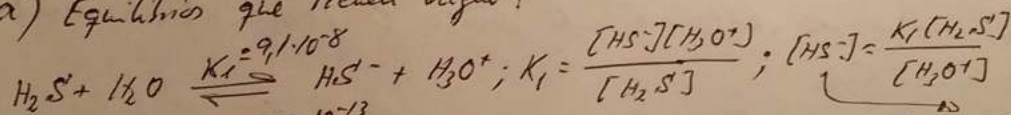
Se tiene una disolución 0,10 M de ácido sulfhídrico, para el que se conocen $K_{a1} = 9,1 \cdot 10^{-8}$ y $K_{a2} = 1,1 \cdot 10^{-13}$

a) Calcular el pH de la disolución.

b) Calcular los porcentajes de disociación.

Solución:

a) Equilibrios que tienen lugar:



$$C_{A0} = 0,10 M$$

Balance de materia para el ácido diprótico: $C_{A0} = [H_2S] + [HS^-] + [S^{2-}] =$

$$= [H_2S] + \frac{K_1 [H_2S]}{[H_3O^+]} + \frac{K_1 K_2 [H_2S]}{[H_3O^+]^2}$$

$$\therefore [H_2S] = \frac{C_{A0}}{1 + \frac{K_1}{[H_3O^+]} + \frac{K_1 K_2}{[H_3O^+]^2}}$$

Balance de cargas eléctricas: $[H_3O^+] = [HS^-] + 2[S^{2-}] + [OH^-];$

$$\therefore [H_3O^+] = \frac{K_1 [H_2S]}{[H_3O^+]} + \frac{2K_1 K_2 [H_2S]}{[H_3O^+]^2} + \frac{K_w}{[H_3O^+]}$$

$$[H_3O^+] = [H_2S] \cdot \left(\frac{K_1}{[H_3O^+]} + \frac{2K_1K_2}{[H_3O^+]^2} \right) + \frac{K_w}{[H_3O^+]}$$

$$\therefore [H_3O^+] = \frac{C_{a0}}{1 + \frac{K_1}{[H_3O^+]} + \frac{K_1K_2}{[H_3O^+]^2}} \cdot \left(\frac{K_1}{[H_3O^+]} + \frac{2K_1K_2}{[H_3O^+]^2} \right) + \frac{K_w}{[H_3O^+]}$$

(I) (II) (III)

esta
ecuación
me suena
de algo!

- * Como $K_1, K_2 \ll K_1$ podemos despreciar los términos (I) y (II) (es lo mismo que hacer $K_2 \approx 0$, es decir, despreciar la 2ª disociación del ácido)
- * Igualmente $K_w = 10^{-14}$ y podemos despreciar el término (III):

$$[H_3O^+] \approx \frac{C_{a0}}{1 + \frac{K_1}{[H_3O^+]}} \cdot \frac{K_1}{[H_3O^+]} = \frac{C_{a0} \cdot K_1}{[H_3O^+] + K_1} \quad \therefore [H_3O^+]^2 + K_1[H_3O^+] - C_{a0} \cdot K_1 = 0$$

\therefore Despejamos $[H_3O^+]$ despreciando la solución negativa por absurda:

$$[H_3O^+] = \frac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 + 4C_{a0}K_1}}{2} = \frac{-9,1 \cdot 10^{-8} + \sqrt{(9,1 \cdot 10^{-8})^2 + 4 \cdot 0,10 \cdot 9,1 \cdot 10^{-8}}}{2}$$

$$= 9,534843099 \cdot 10^{-5} M; \quad pH = -\log [H_3O^+] = -\log 9,534843099 \cdot 10^{-5}$$

$$= 4,020686449. \quad \text{Mirando cifras significativas } \boxed{pH = 4,0}$$

Podemos comprobar si las aproximaciones llevadas a cabo son válidas, viendo si cumplen la ecuación general exacta ecuadrada líneas arriba:

$$\frac{C_{a0}}{1 + \frac{K_1}{[H_3O^+]} + \frac{K_1K_2}{[H_3O^+]^2}} \cdot \left(\frac{K_1}{[H_3O^+]} + \frac{2K_1K_2}{[H_3O^+]^2} \right) + \frac{K_w}{[H_3O^+]} = \frac{0,10}{1 + \frac{9,1 \cdot 10^{-8}}{9,534843099 \cdot 10^{-5}} + \frac{9,1 \cdot 10^{-8} \cdot 1,1 \cdot 10^{-12}}{(9,534843099 \cdot 10^{-5})^2}}$$

$$= \left(\frac{9,1 \cdot 10^{-8}}{9,534843099 \cdot 10^{-5}} + \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-8} \cdot 1,1 \cdot 10^{-12}}{(9,534843099 \cdot 10^{-5})^2} \right) + \frac{10^{-14}}{9,534843099 \cdot 10^{-5}} = 9,534853609 \cdot 10^{-5} M$$

$[H_3O^+]$

$$\text{Error relativo cometido} = \frac{(9,534853609 \cdot 10^{-5} - 9,534843099 \cdot 10^{-5})}{9,534843099} \cdot 100 = 1,1 \cdot 10^{-9} \%$$

MUY BUENA
APROXIMACIÓN

b)

$$\text{Porcentaje} \quad [H_2S] = \frac{C_{H_2S}}{1 + \frac{K_1}{[H_3O^+]} + \frac{K_1 K_2}{[H_3O^+]^2}} = \frac{0,1 M}{1 + \frac{9,1 \cdot 10^{-8}}{9,534843099 \cdot 10^{-5}} + \frac{9,1 \cdot 10^{-8} \cdot 1,1 \cdot 10^{-13}}{(9,534843099 \cdot 10^{-5})^2}}$$

Se podía
despreciar

$$[H_2S] = 0,099904651 M$$

$$[HS^-] = \frac{K_1 [H_2S]}{[H_3O^+]} = \frac{9,1 \cdot 10^{-8} \cdot 0,099904651}{9,534843099 \cdot 10^{-5}} = 9,5348431 \cdot 10^{-5} M$$

$$[S^{2-}] = \frac{K_2 [HS^-]}{[H_3O^+]} = \frac{1,1 \cdot 10^{-13} \cdot 9,5348431 \cdot 10^{-5}}{9,534843099 \cdot 10^{-5}} = 1,1 \cdot 10^{-13} M$$

* Porcentaje para la 1ª disociación:

$$\alpha_1 = \frac{[HS^-]}{[H_2S]} = \frac{9,5348431 \cdot 10^{-5}}{0,099904651} = 9,543943154 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \frac{\% 1^a}{\text{disociación}} = 0,095\%$$

* Porcentaje para la 2ª disociación:

$$\alpha_2 = \frac{[S^{2-}]}{[HS^-]} = \frac{1,1 \cdot 10^{-13}}{9,5348431 \cdot 10^{-5}} = 1,153663451 \cdot 10^{-9} \Rightarrow \frac{\% 2^a}{\text{disociación}} = 1,2 \cdot 10^{-7}\%$$