PROBLEMA Nº3 FÍSICA
FÓSIL ANDALUZ

Un recipiente muy grande lleno de nitrógeno, que se considera gas perfecto y que siempre está a la presión de 5 atm pasa a través de una tobera a otro recinto donde la presión es de 4 atm. La temperatura del primer recinto es de 27°C. Calcular la velocidad a la entrada del segundo recipiente, suponiendo:

a) Régimen isotérmico.

b) Régimen adiabático, calculando además la temperatura del segundo recinto.

Coeficiente adiabático = 1,4

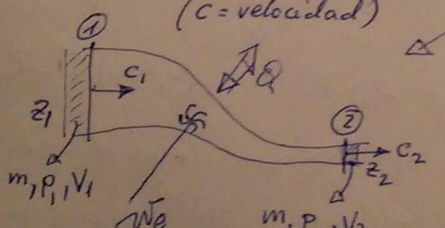
El gas se supone perfecto y se desprecian los cambios de nivel. La velocidad del gas en el primer recinto se supone nula.

Peso molecular = 28

Solución:

Supongamos un sistema abierto tal como:

(c = velocidad)



(z = altura)

que consiste en una conducción de sección variable, fijando nuestra atención en el sector comprendido entre las secciones ① y ② a través de los cuales se intercambia una masa circulante, m, que entra por ① con P_1, V_1, c_1 y sale por ② con P_2, V_2, c_2

Consideramos $m = cte \Rightarrow$ régimen estacionario.

Para mayor generalidad pensaremos también en la existencia de una máquina, bomba o turbina, capaz de aportar o eliminar energía mecánica, W_e, del sistema. También consideramos que el sistema puede intercambiar energía térmica, Q, con los alrededores. Para hacer el balance de energía total en este sistema, le aplicamos el 1er principio de la termodinámica: $\Delta U = Q + W$, pero hemos de considerar distintos términos en el sumando W:

* W_g = trabajo intercambiado debido a la variación de energía potencial de la masa circulante $= -mg(z_2 - z_1)$. Hemos cambiado el signo

a la variación de energía potencial de la masa circulante, m, porque hemos de centrar nuestra atención en el sistema y si la masa circulante pierde energía potencial es que nuestro sistema la gana.

* W_c = energía intercambiada debido a la variación de energía cinética de la masa circulante, m $\Rightarrow W_c = -\frac{1}{2} m (c_2^2 - c_1^2)$

Hemos cambiado su signo por la misma razón que en el caso anterior.

* W_p = trabajo debido a las fuerzas de presión o energía de flujo.

Cuando m entra por ① pasa de V_1 a $V=0$ a $P_1=cte$ por lo que aporta un trabajo al sistema: P_1V_1. Cuando m sale por ② pasa de cero a V_2 a $P_2=cte$ por lo que extrae un trabajo del sistema: $-P_2V_2$

Por lo tanto, $W_p = P_1V_1 - P_2V_2$

* W_e = trabajo aportado por una bomba o extraído del sistema por una turbina.
  (e ← externo)

Así pues: $W = W_g + W_c + W_p + W_e = -mg(z_2-z_1) - \frac{1}{2}m(c_2^2-c_1^2) +$
$+ P_1V_1 - P_2V_2 + W_e$

Sustituyendo en el 1er principio: $\Delta U = U_2 - U_1 = m\left[g(z_1-z_2) + \frac{c_1^2-c_2^2}{2} + \right.$ $\left. + P_1v_1 - P_2v_2 + w_e\right] + Q$ donde v = volumen específico, por unidad de masa circulante y w_e es el trabajo exterior específico, por unidad de masa circulante. Dividiendo la ecuación entre m y utilizando en minúscula, las propiedades específicas por unidad de masa:

$$u_2 - u_1 = g(z_1-z_2) + \frac{1}{2}(c_1^2-c_2^2) + P_1v_1 - P_2v_2 + w_e + q$$

En nuestro caso particular:

* despreciamos los cambios de nivel $z_1 - z_2 \simeq 0$
* no se intercambia trabajo con una máquina $w_e = 0$ (proceso de derrame)

Entonces queda $u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(c_1^2-c_2^2) + P_1v_1 - P_2v_2 + q$

$\therefore (u_2 + P_2v_2) - (u_1 + P_1v_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) = q$. Utilizando la definición de entalpía específica $h = u + pv$, llegamos a una expresión conocida como ecuación fundamental de los procesos de derrame : $\boxed{q = (h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2)}$

a) Régimen isotérmico : $T_1 = 27°C = 27 + 273,15 = 300,15\,K = T_2 = cte = T$

No tiene mucho sentido para una tobera, pero como el enunciado lo dice así, expresamente, calculamos; teniendo en cuenta $q \neq 0$

Teniendo en cuenta que también ha de cumplirse

$$\left.\begin{array}{l} đq = du + đW = du + p\,dv \\ h = u + pv \to dh = du + p\,dv + v\,dp \\ \Downarrow \\ du = dh - p\,dv - v\,dp \end{array}\right\} \; đq = dh - p\,dv - v\,dp + p\,dv \;\therefore$$

$$\therefore \int đq = \int_1^2 dh - \int_1^2 v\,dp \quad \therefore \quad \boxed{q = (h_2 - h_1) - \int_1^2 v\,dp}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones recuadradas llegamos a:

$$\boxed{\frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) = \underbrace{-\int_1^2 v\,dp}_{\text{trabajo técnico}}}$$

que nos dice que el posible trabajo técnico realizado por el sistema durante el derrame se traduce en variar su energía cinética.

Gas perfecto : $PV = nRT = \frac{m}{M}RT = cte$; para obtener homogeneidad en las unidades m lo pensamos en kg y entonces ⇒

⇒ $M = 28\,g/mol = \underline{0,028\,\frac{kg}{mol}}$; $R = 8,314\,\frac{J}{mol \cdot K}$

$v = \frac{V}{m} \Rightarrow P\frac{V}{m} = \frac{R}{M}T \;\therefore\; v = \frac{RT}{PM}$. Sustituyendo en la integral:

$$\frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) = -\frac{RT}{M}\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} \;\therefore\; \frac{1}{2}(c_2^2 - \cancel{c_1^2}) = -\frac{RT}{M}\ln\frac{P_2}{P_1} = \frac{RT}{M}\ln\frac{P_1}{P_2}$$

$c_1 \simeq 0$ (velocidad nula en el 1er recinto)

$$c_2 = \sqrt{\frac{2RT}{M}\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,314\,\frac{kg\,m^2/s^2}{mol\,K} \cdot 300K}{0,028\,kg/mol}\ln\left(\frac{5}{4}\right)} = \underline{199,4\,m/s}$$

$P_1 = 5\,atm \longrightarrow P_2 = 4\,atm$

Mirando cifras significativas $\boxed{C_2 = 200\, m/s}$

- b) <u>Régimen adiabático</u>: $q = 0 \Rightarrow (h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) = 0$ ∴

Es el que tiene sentido utilizar en los procesos de derrame en toberas y difusores porque son muy rápidos y turbulentos de manera que puede considerarse que el sistema no tiene prácticamente tiempo para intercambiar calor con el entorno.

$$\therefore \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) = h_1 - h_2 = c_p (T_1 - T_2) = c_p T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Transformación adiabática $\Rightarrow P_1 v_1^\gamma = P_2 v_2^\gamma \therefore \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^\gamma = \frac{P_2}{P_1} \therefore$

$$\therefore \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{RT_1/P_1M}{RT_2/P_2M} = \frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{P_2}{P_1} \therefore \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = \frac{T_1}{T_2} \therefore$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 v_1 = \frac{RT_1}{M} \\ P_2 v_2 = \frac{RT_2}{M} \end{array}\right\} \text{gases perfectos} \left\{\begin{array}{l} v_1 = \frac{RT_1}{P_1 M} \\ v_2 = \frac{RT_2}{P_2 M} \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{T_1}{T_2} \therefore$$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \longrightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 300{,}15 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{0,4}{1,4}} = \boxed{281{,}61\,K}$$

Mirando cifras significativas $T_2 = 300 K$

$$\frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) = c_p T_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

Relación de Mayer: $c_p = \frac{R}{M} + c_v = \frac{R}{M} + \frac{c_p}{\gamma} \therefore c_p - \frac{c_p}{\gamma} = \frac{R}{M} \therefore$

Exponente adiabático $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4$ (¡ojo! por unidad de masa)

$$\therefore c_p\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p = \frac{R}{M} \therefore$$

$$\therefore c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}$$

$$\frac{1}{2}(C_2^2 - \underbrace{C_1^2}_{\simeq 0}) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{R}{M}\cdot T_1\cdot\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \therefore C_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{R}{M}\cdot T_1\cdot\left[1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \therefore$$

$$\therefore C_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}4}{0{,}4}\cdot\frac{8{,}314\,\frac{kg\,m^2/s^2}{mol\cdot K}}{0{,}028\,kg/mol}\cdot 300{,}15\,K\cdot\left[1 - \left(\frac{4\,atm}{5\,atm}\right)^{\frac{0,4}{1,4}}\right]} = \underline{196{,}4\,m/s}$$

Mirando cifras significativas $\Rightarrow \boxed{C_2 = 200\,m/s}$ Curiosamente podría considerarse el proceso isotermo pues llegamos al mismo resultado.