PROBLEMA Nº 1
FÍSICA GALICIA 2006

Una masa de fluido, situada en un recipiente cilíndrico, gira con velocidad angular ω constante alrededor del eje del cilindro. El fluido es incompresible y de densidad ρ.

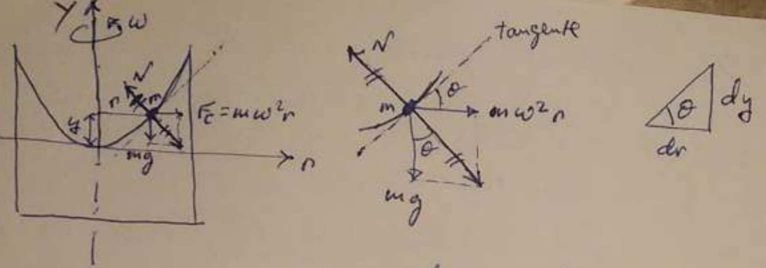
a) Calcular cuánto vale la variación de la presión con el radio en cualquier sección horizontal.

b) Sabiendo que la presión en el eje vale P_0, encontrar la presión en un punto cualquiera a distancia r.

Solución:

Si el cilindro no está en rotación, la superficie libre de separación del líquido será horizontal. Cuando el cilindro comienza a girar, el líquido entrará en rotación. Para un observador no inercial, en rotación solidaria con el fluido, las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido de masa m, situado en su superficie, a una distancia r del eje de rotación, serán: el peso, mg; la fuerza centrífuga, $F_c = m\,a_c = m\,\omega^2 r$; y la fuerza normal que ejercen las otras partículas de fluido sobre la partícula que consideramos. Puesto que se trata de un fluido, como consecuencia de la fuerza centrífuga, unas capas de fluido deslizan sobre otras haciendo que el nivel de líquido se eleve en la parte colindante con las paredes del cilindro. Puesto que nuestro fluido es incompresible, a consecuencia de lo anteriormente dicho, se debe hundir en la parte cercana al eje de rotación.

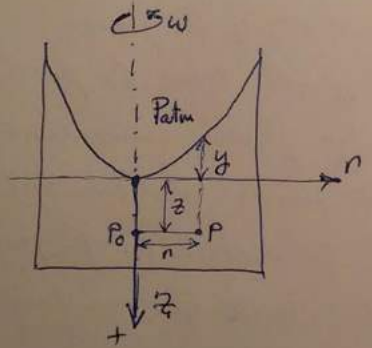
Hacemos un balance de fuerzas con objeto de encontrar el perfil de la superficie libre de separación de nuestro líquido en rotación, una vez que alcanzó el equilibrio:



$$tg\,\theta = \frac{dy}{dr} = \frac{\cancel{m}\omega^2 r}{\cancel{m}g}$$; Integrando la ecuación diferencial, de variables separadas: $\int r\,dr = \frac{g}{\omega^2}\int dy$ ∴

∴ $\frac{r^2}{2} = \frac{g}{\omega^2}\,y + cte$; que es la ecuación de una parábola (paraboloide). La constante de integración vale cero ya que en el vértice de la parábola $r=0$; $y=0 \Rightarrow cte = 0 \Rightarrow y = \frac{r^2\omega^2}{2g}$

Ahora consideramos un eje z que avanza, según la figura, con su sentido positivo hacia abajo y el origen en el vértice de la parábola; entonces las respuestas a los apartados a) y b) son triviales:



a) $\Delta p = \rho g y = \rho \cancel{g} \frac{r^2\omega^2}{2\cancel{g}}$ ∴

∴ $\boxed{\Delta p = \frac{1}{2}\rho (r\omega)^2}$

b) $\Delta p = P - P_0 = \frac{1}{2}\rho(r\omega)^2$ ∴

∴ $\boxed{P = P_0 + \frac{1}{2}\rho (r\omega)^2}$

Teniendo en cuenta la presión atmosférica Patm, la ecuación quedaría: $\boxed{P = P_{atm} + \rho g z + \frac{1}{2}\rho(r\omega)^2}$