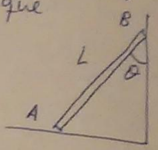
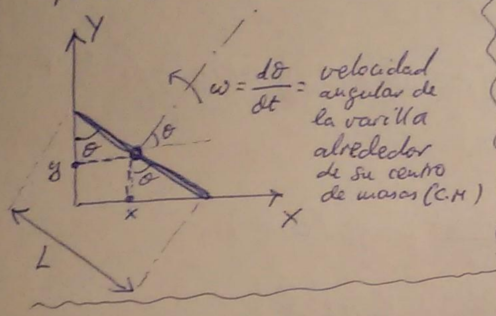
PROBLEMA Nº1 FÍSICA GALICIA 1999

Una varilla uniforme de masa M y longitud L parte del reposo en la posición que se indica en la figura. Si el rozamiento con ambas superficies es despreciable, hallar la aceleración angular de la varilla con respecto al eje que pasa por su centro de masas.



• Solución Newtoniana: inicialmente, en $t=0 \Rightarrow \theta=\theta_0$; $\omega=0$ (reposo)

En un instante $t>0 \Rightarrow \theta$, será el ángulo que forma la varilla con la pared:



* Coordenadas de posición del C.M. varilla:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = \frac{L}{2}\cos\theta \end{array}\right\} x^2+y^2 = \frac{L^2}{4}\underbrace{(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = \frac{L^2}{4}$$

* Velocidad del C.M:

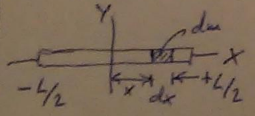
$$\left.\begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{L}{2}\cos\theta \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = \frac{L}{2}\,\omega\cos\theta \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\, \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = -\frac{L}{2}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right] \therefore$$

$$\therefore v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{L^2}{4}\omega^2\underbrace{(\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}_{1} \therefore v^2 = \frac{L^2}{4}\omega^2 \therefore v = \frac{L}{2}\omega$$

* Principio de conservación de la energía entre el instante inicial $t=0$, que se encuentra en reposo, y un instante t en el que la varilla todavía mantiene contacto con la pared vertical:

$$\underbrace{M\cdot g\cdot \frac{L}{2}\cos\theta_0}_{\text{E. potencial inicial}} = \underbrace{Mgy}_{\text{E. potencial en } t} + \underbrace{\frac{1}{2}Mv^2}_{\text{E. cinética de translación}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{CM}\cdot\omega^2}_{\text{E. cinética de rotación en torno al C.M.}}$$

* Cálculo del momento de inercia I_{CM} de la varilla respecto del C.M alrededor del que rota:



$$\text{densidad lineal} = \lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} = \text{cte. (varilla homogénea)}$$

$$I_{CM} = \int x^2\,dm = \lambda\int_{-L/2}^{L/2} x^2\,dx = \frac{M}{3L}\left(\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right) = \frac{1}{12}ML^2$$

* Sustituimos en la ecuación de conservación de la energía las expresiones deducidas para y, v e I_{CM}:

$$\cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{2}\cos\theta_0 = \cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\cancel{M}\frac{L^{\cancel{2}}}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}\cancel{M}L^2\omega^2 \therefore$$

$$\therefore g(\cos\theta_0 - \cos\theta) = \frac{4}{3\cdot 4}\cdot L\cdot\omega^2 \therefore \boxed{\omega^2 = \frac{3g}{L}(\cos\theta_0-\cos\theta)}$$

* Por último derivamos respecto de t la última ecuación, para obtener la aceleración angular, α, pedida:

$$2\underbrace{\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{L}\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \therefore 2\omega\alpha = \frac{3g}{L}\operatorname{sen}\theta\cdot\omega \quad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2L}\operatorname{sen}\theta}$$

(con $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$)

* **Solución Lagrangiana**: sistema con un único grado de libertad.

Utilizamos la ecuación de Lagrange: $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$\frac{1}{12}ML^2$; $v^2 = \frac{L^2}{4}\omega^2 = \frac{L^2}{4}\dot\theta^2$ ya deducido

$$T = \text{energía cinética de la varilla} = \frac{1}{2}I_{cm}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}M(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ML^2\dot\theta^2 +$$

$$+\frac{1}{2}M\frac{L^2}{4}\dot\theta^2 = \frac{ML^2\dot\theta^2 + 3ML^2\dot\theta^2}{6\cdot 4} = \frac{4ML^2\dot\theta^2}{6\cdot 4} \quad \underline{T = \frac{1}{6}ML^2\dot\theta^2}$$

$$V = \text{energía potencial de la varilla} = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 + Mgy = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 +$$

$$+ Mg\frac{L}{2}\cos\theta \therefore \underline{V = \frac{MgL}{2}(-\cos\theta_0 + \cos\theta)}$$

$$\mathcal{L} = \text{lagrangiano} = T - V = \frac{1}{6}ML^2\dot\theta^2 - \frac{MgL}{2}(-\cos\theta_0 + \cos\theta)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3}ML^2\dot\theta = \frac{1}{3}ML^2\dot\theta;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{1}{3}ML^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = +\frac{MgL}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$\rightarrow$ Sustituyendo en $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$ tenemos

$\frac{1}{3}ML^2\ddot\theta - \frac{MgL}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$ de donde despejamos la aceleración angular pedida:

$$\boxed{\alpha = \ddot\theta(\theta) = \frac{3g}{2L}\operatorname{sen}\theta}$$