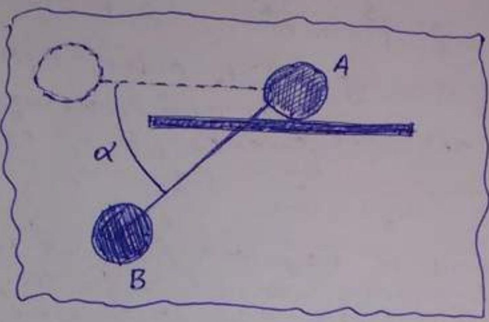
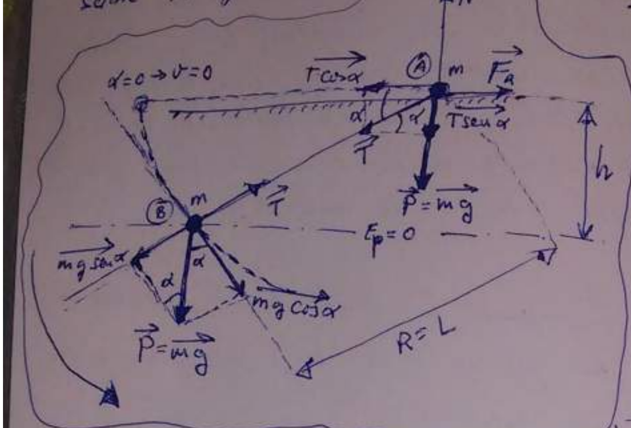
**PROBLEMA Nº 1**
**CLM 2006**

Dos cuerpos A y B de masa m están unidos por un hilo inextensible de longitud L y masa despreciable de tal manera que el cuerpo A puede deslizar por una superficie horizontal. Si en el instante inicial $\alpha = 0$. Hallar el coeficiente de rozamiento mínimo entre la superficie horizontal y el cuerpo A para que éste no se mueva.




Explíquense los fundamentos teóricos en los que se basa el procedimiento del ejercicio.

• Solución: Debido a su peso, $\vec{P} = m\vec{g}$, el cuerpo B cae, siguiendo una trayectoria semicircular, $0 \le \alpha \le 180°$, radio $= R = L$. Como consecuencia el hilo se tensa; Ⓐ y Ⓑ tiran del hilo sometiéndolo a tracción y como contrapartida, por la 3ª ley de Newton o ley de acción y reacción, aparecen sendas tensiones aplicadas sobre A y B, con sentidos contrarios a dicha tracción. Puesto que el hilo es idealmente inextensible y sin masa, por la 2ª ley de Newton o ley fundamental de la dinámica, ambas tensiones serán iguales ($\vec{T} - \vec{T}' = \overset{0}{m}\vec{a} \therefore \vec{T} = \vec{T}'$). La componente horizontal de la tensión que actúa sobre Ⓐ, $T \cdot \cos\alpha$, tira de dicho cuerpo hacia la izquierda, luego la fuerza de rozamiento $\vec{F_R}$, que siempre se opone al movimiento del cuerpo, estará dirigida hacia la derecha. Por otro lado, la componente vertical de la tensión que actúa sobre Ⓐ, $T \cdot \sin\alpha$, tira de este cuerpo hacia abajo (junto con su peso, $\vec{P} = \overrightarrow{mg}$). Es decir, Ⓐ ejerce una fuerza vertical, sobre la superficie de apoyo, igual a $P + T \cdot \sin\alpha$, dirigida hacia abajo, y por la 3ª ley de Newton, la "superficie" ejercerá sobre A una fuerza normal $N = P + T \cdot \sin\alpha$ dirigida verticalmente hacia arriba. Echando mano de la ley de Coulomb del rozamiento sabemos que la fuerza de fricción estática sobre Ⓐ viene dada por $\vec{F_R} = \mu\vec{N}$ donde $\mu$ es el coeficiente de rozamiento estático. Sabiendo esto dibujamos nuestro diagrama de cuerpo libre identificando la dirección y sentido de todas las fuerzas que actúan sobre A y B :




* Ley de Coulomb del rozamiento: $F_R = \mu N$ ∴ $\boxed{\mu = \dfrac{F_R}{N}}$ [1]

* Aplicamos la 2ª ley de Newton al Cuerpo (A), que está en equilibrio estático y por lo tanto:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}^{\nearrow 0} \therefore \sum \vec{F} = 0$$

CUERPO (A) $\Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_R = T\cdot\cos\alpha \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N = P + T\,\text{sen}\,\alpha = mg + T\,\text{sen}\,\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sustituyendo $F_R$ y $N$ en [1]: $\boxed{\mu = \dfrac{T\cdot\cos\alpha}{mg + T\cdot\text{sen}\,\alpha}}$ [2]

* Aplicamos la 2ª ley de Newton al cuerpo (B), en la dirección tangente a su trayectoria (tendrá una aceleración tangencial, $a_T$) y en la dirección normal a su trayectoria (tendrá una dirección normal o centrípeta cuyo valor viene dado por la ley de la fuerza centrífuga publicada por Huygens: $a_N = \frac{v^2}{R}$, donde $v$ es la velocidad lineal de (B) y $R$ el radio de curvatura de la trayectoria que en nuestro caso vale $R = L$):

CUERPO (B), $\sum\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_N)$ $\begin{cases} \sum F_T = m\,a_T \Rightarrow P\cdot\cos\alpha = m\,a_T \\ \sum F_n = m\,a_N \Rightarrow T - P\cdot\text{sen}\,\alpha = m\,a_N = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$ Como $\begin{Bmatrix} P = mg \\ R = L \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = P\cdot\text{sen}\,\alpha + m\frac{v^2}{R} = mg\,\text{sen}\,\alpha + m\frac{v^2}{L} \therefore \boxed{T = m\left(g\,\text{sen}\,\alpha + \frac{v^2}{L}\right)} \quad [3]$$

*Ahora aplicamos el principio de conservación de la energía al cuerpo (B) suponiendo que inicialmente, $\alpha = 0$, parte del reposo ($v = 0$). Considerando el origen de energías potenciales gravitacionales ($E_p = 0$) a la altura a la que se encuentre (B) en un instante $t > 0$; toda su energía potencial inicial $E_p = mgh$ (donde $h = L\cdot\text{sen}\,\alpha$ es la distancia vertical entre la posición final de (B) y su posición inicial) se transforma en energía cinética final:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 : \quad E_p = E_c \therefore \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Big\}_{h = L\cdot\text{sen}\,\alpha}\ g L\,\text{sen}\,\alpha = \frac{v^2}{2} \therefore \boxed{v^2 = 2gL\,\text{sen}\,\alpha} \quad [4]$$

Sustituyendo [4] en [3] resulta: $T = mg\left(\text{sen}\,\alpha + \dfrac{2\cancel{L}\,\text{sen}\,\alpha}{\cancel{L}}\right) \therefore \boxed{T = 3mg\,\text{sen}\,\alpha}$ [5]

Sustituyendo [5] en [2] queda el coeficiente de rozamiento estático $\mu$ como una función del ángulo $\alpha$:

$$\boxed{\mu = \frac{3\cancel{mg}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cancel{mg} + 3\cancel{mg}\,\text{sen}^2\alpha} = \frac{3\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1 + 3\,\text{sen}^2\alpha}} \quad [6]$$

Si nos preguntan por el $\mu_{MÍNIMO}$, éste debe existir y al ser un mínimo se debe cumplir que su primera derivada respecto del ángulo $\alpha$ se anulará: $\frac{d\mu}{d\alpha} = 0$ ∴

$$3\cdot\frac{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)(1 + 3\,\text{sen}^2\alpha) - 6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{(1 + 3\,\text{sen}^2\alpha)^2} = 0 \therefore \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + 3\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha - 3\,\text{sen}^4\alpha -$$

$$- 6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = 0 \therefore 1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha - 3\,\text{sen}^2\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha) - 3\,\text{sen}^4\alpha = 0 \therefore 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha -$$

$$- 3\,\text{sen}^2\alpha + 3\,\text{sen}^4\alpha - 3\,\text{sen}^4\alpha = 0 \therefore 1 - 5\,\text{sen}^2\alpha = 0 \therefore \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{5}$$

Si $sen^2\alpha = \frac{1}{5}$ entonces $sen\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, pero $sen\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ sería absurdo e imposible en nuestro caso porque $0 \leq \alpha \leq 180°$; así que el $sen\alpha$ debe ser positivo $\Rightarrow sen\,\alpha = +\frac{1}{\sqrt{5}}$. Para calcular $cos\alpha$ tomamos el teorema de Pitágoras expresado con funciones trigonométricas: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \therefore Cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha = $
$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5} \therefore cos\,\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Desechamos el valor negativo del coseno pues nos conduciría a un valor negativo de $\mu_{MÍN}$ (sustituyendo en [6]) que es absurdo.

Entonces tenemos claro que $sen\,\alpha = +\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\left(sen^2\alpha = \frac{1}{5}\right)$ y $Cos\,\alpha = +\frac{2}{\sqrt{5}}$. Sustituyendo en la ecuación [6] calculamos el coeficiente de rozamiento estático mínimo, de (A) con la superficie, pedido:

$$\mu_{MIN} = \frac{3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}}{1+3\cdot\frac{1}{5}} = \frac{\frac{6}{\cancel{5}}}{\frac{5+3}{\cancel{5}}} = \frac{\cancel{2}\cdot 3}{4\cdot\cancel{2}} \therefore$$

$$\therefore \boxed{\mu_{MIN} = \frac{3}{4} = 0{,}75}$$

Para validar nuestra solución, y comprobar que se trata de un mínimo, deberíamos derivar por segunda vez $\mu$ respecto de $\alpha$ y comprobar que para $\mu = 0{,}75$, $\frac{d^2\mu}{d\alpha^2} > 0$. Pero no me queda ninguna gana y lo dejo como ejercicio para los lectores avezados.

¡Un saludo!