PROBLEMA Nº2
FÍSICA
GALICIA 2003

Sobre una boya cilíndrica de $0{,}20\,m^2$ de superficie (de base) y 200 Kg de masa está situado un cuerpo de 40 kg, flotando el conjunto en el mar. Si el cuerpo cae al mar, demostrar que la boya realiza un movimiento armónico simple y calcular la amplitud y el periodo. Densidad del agua del mar $= 1.04\,g/cm^3$. Se supone que el movimiento de la boya es vertical.

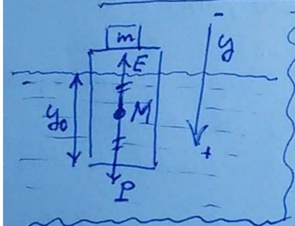
Solución:

$S = 0{,}20\,m^2$
$M = 200\,kg$
$m = 40\,kg$

Suponemos despreciable la fricción de la boya con el agua de mar. Tomaremos $g = 9{,}8\,m/s^2$

$$\rho = 1{,}04\,g/cm^3 = 1{,}04\,\cancel{g}\cdot\frac{10^{-3}\,kg/\cancel{g}}{1\,\cancel{cm^3}\cdot 10^{-6}\,\frac{m^3}{\cancel{cm^3}}} = 1040\,kg/m^3$$

* Posición de equilibrio estático con m encima de la boya M:



Tomamos el eje Y positivo hacia abajo, para evitar tener que poner signo negativo delante de "y".

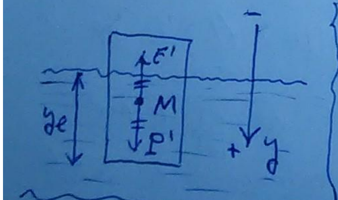
$$\sum F_y = 0 \;\therefore\; \underset{\substack{\text{peso}\\ \text{de }(m+M):\, P=(m+M)g}}{P} - \underset{\text{empuje (principio de Arquímedes)}}{E} = 0 \;\therefore\; E = P \;\therefore$$

$E = \overbrace{\rho \underbrace{V_0}_{\text{masa de líquido desalojada}} g}^{\text{peso del líquido desalojado}}$

V_0 = volumen de líquido desalojado en esta situación inicial $\Rightarrow V_0 = y_0 S$

$$\therefore\; \rho V_0 \cancel{g} = (m+M)\cancel{g} \;\therefore\; \rho y_0 S = m+M \;\therefore\; \boxed{y_0 = \frac{m+M}{\rho S}}$$

* Posición de equilibrio estático sin m encima de la boya M:

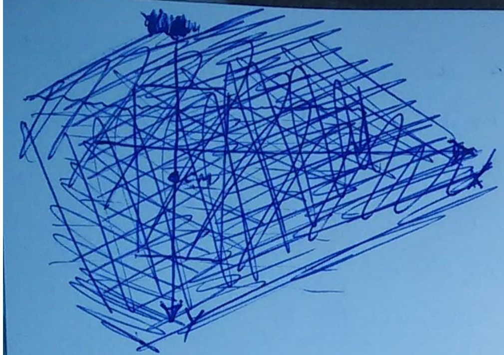


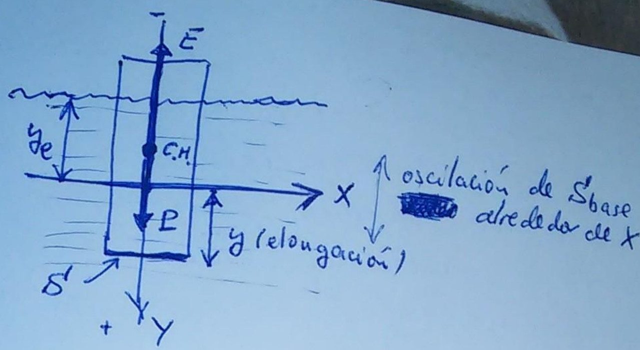
$$\sum F_y = 0 \;\therefore\; P' - E' = 0 \;\therefore\; E' = P' \;\therefore\; \rho V_e \cancel{g} = M\cancel{g} \;\therefore$$

$$\therefore\; \rho y_e S = M \;\therefore\; \boxed{y_e = \frac{M}{\rho S}}$$

* Posición de no equilibrio estático sin m encima de la boya M:

Vamos a situar nuestro eje X (referencia para las elongaciones, y=0) a y_e metros de profundidad en el seno del mar y nos fijaremos cómo oscila la superficie S de la base de la boya alrededor de esta posición de equilibrio de la boya M sin el cuerpo m encima.





* Aplicando la 2ª de Newton: $F = -E + P = Ma$

$$F = -E + P = -\rho g S'(y_e + y) + Mg = -\rho g S\left(\frac{M}{\rho S} + y\right) + Mg =$$

Ya vimos que $y_e = \frac{M}{\rho S}$

$$= -\cancel{\rho g S}\frac{M}{\cancel{\rho S'}} - \rho g S y + Mg =$$

$$= -\cancel{Mg} - \rho g S y + \cancel{Mg} \therefore \boxed{F = -\rho g S y}$$

Así que la F es una fuerza recuperadora porque sigue la ley de Hooke: $F = -ky$ (cte. recuperadora). Es decir, la ecuación que nos proporciona la elongación en un movimiento armónico simple (MAS) es:

$$y = \underset{\text{amplitud}}{A} \cdot \text{sen}(\omega \overset{\text{tiempo}}{t} + \varphi_0)$$

fase inicial

pulsación: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ← período de oscilación

Si la derivamos dos veces respecto del tiempo y aplicamos la segunda ley de Newton llegamos a la ley de Hooke, a saber:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \therefore$$

$$\therefore a = -\omega^2 y \;;\; F = Ma = -M\omega^2 y = -ky \;\#$$

Por lo tanto queda demostrado, que la fuerza resultante, F, que actúa sobre la boya dará como resultado un MAS, cuya amplitud será la diferencia entre la posición inicial y_0 respecto a la superficie y la de equilibrio y_e: $A = y_0 - y_e \therefore$

$$\therefore A = \frac{m+M}{\rho S} - \frac{M}{\rho S} = \frac{m}{\rho S} + \cancel{\frac{M}{\rho S}} - \cancel{\frac{M}{\rho S}} = \frac{40\,kg}{1040\,\frac{kg}{m^3}\cdot 0{,}20\,m^2} = 0{,}1923\,m$$

$\therefore \boxed{A = 19{,}23\,cm}$. Comparando ecuaciones calculamos el período de oscilación:

$$\left.\begin{array}{l} F = -\rho g S y \\ F = -M\omega^2 y \end{array}\right\} M\omega^2 = \rho g S \therefore M\frac{4\pi^2}{T^2} = \rho g S \therefore$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho g S}} = 2\pi\sqrt{\frac{200\,kg}{1040\,\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}20\,m^2}} \Rightarrow \boxed{T = 1{,}968\,s}$$

(mirando cifras significativas se podría responder $\begin{array}{l} T = 2{,}0\,s \\ A = 0{,}19\,m \end{array}$ perfectamente)