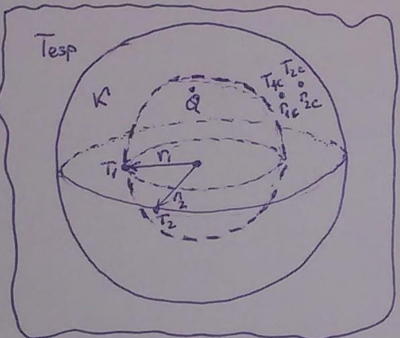
La Estrella de la Muerte es una estación espacial que se encuentra viajando a través del espacio hacia el planeta Alderaan, con el objetivo de destruirlo usando el Rayo destructor de planetas si la Alianza Rebelde no se rinde ante las exigencias del Imperio Galáctico. Activar el Rayo destructor de planetas produce un sobrecalentamiento de las zonas más cercanas al núcleo, lo que hace imposible la presencia de tropas imperiales en esas zonas.

Se considera la Estrella de la Muerte una esfera perfecta de radio exterior $r_2 = 60\,km$. Tal y como se muestra en la figura,



interiormente se compone de un núcleo esférico de radio $r_1 = 40\,km$, donde se genera la potencia térmica del Rayo destructor, y una carcasa también esférica, de radio interior r_1 y radio exterior r_2, donde se encuentran los puestos de trabajo de las tropas imperiales. La conductividad térmica de la carcasa exterior puede considerarse $K = 100\,W/(mK)$

La estación espacial solo puede disipar calor por radiación hacia el espacio. La emisividad de la superficie exterior de la estación espacial es $\varepsilon = 0{,}8$ y se considera que la temperatura efectiva de radiación del espacio (cuerpo negro) es $T_{esp} = 3\,K$. La temperatura de la superficie exterior de la estación espacial se mantiene en todo momento a $T_2 = 73\,K$.

a) Calcular la potencia de calor disipada al espacio por radiación y la temperatura en $r_1\,(T_1)$. (1 punto)

b) Teniendo en cuenta que las tropas imperiales pueden desempeñar su trabajo a temperaturas comprendidas entre $T_{1C} = 40\,°C$ y $T_{2C} = 0\,°C$, calcular los valores de r_{1C} y r_{2C}, entre los que puede haber personal trabajando. (2 puntos)

Datos:

Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,W/m^2 \cdot K^4$

Resistencia térmica por conducción de una pared en coordenadas esféricas: $R = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi K}$

Solución:

• a) Teniendo en cuenta la ley de Stefan-Boltzmann, la potencia calorífica o caudal de calor $\dot{Q}$ que escapa de la Estrella de la Muerte al espacio será:

superficie externa

$$\dot{Q} = \underbrace{\varepsilon \sigma \left(T_2^4 - T_{esp}^4\right)}_{\text{flujo de calor por radiación}} S_2' = \varepsilon \sigma \left(T_2^4 - T_{esp}^4\right) 4\pi r_2^2$$

$$\dot{Q} = 0{,}8 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}\ (73^4 - 3^4)\ \mathrm{K^4} \cdot 4\pi\ 60000^2\ \mathrm{m^2} =$$

$$= 5{,}827 \cdot 10^{10}\ \mathrm{W} = 58{,}3 \cdot 10^9\ \mathrm{W} \Rightarrow \boxed{\dot{Q} = 58{,}3\ \mathrm{MW}}$$

En régimen estacionario $\Rightarrow \left(\text{Caudal de calor}\right) = \dfrac{\text{fuerza impulsora}}{\text{Resistencia}} = \dfrac{\Delta T}{R}$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi K}} \Rightarrow T_1 = T_2 + \dot{Q}\,\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi K} = 73 + 5{,}827 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\frac{1}{40000} - \frac{1}{60000}}{4\pi \cdot 100} \therefore$$

$$\therefore \boxed{T_1 = 459\ \mathrm{K}}$$

• b) Aplicamos la misma ecuación, que al fin y al cabo es la ley de Fourier, desde un punto i, interior con T_i y r_i, hasta la superficie exterior con $T_2 = 73\ \mathrm{K}$ y $r_2 = 60\ \mathrm{km} = 60000\ \mathrm{m}$:

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_2}{\dfrac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_2}}{4\pi K}} \; ; \quad \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_2} = 4\pi K\,\frac{T_i - T_2}{\dot{Q}} \; ; \quad \frac{1}{r_i} = 4\pi K\,\frac{T_i - T_2}{\dot{Q}} + \frac{1}{r_2} \therefore$$

$$\therefore r_i = \left(4\pi K\,\frac{T_i - T_2}{\dot{Q}} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1}$$

Para $T_i = T_{1c} = 40\,^\circ\mathrm{C} = 40 + 273 = 313\ \mathrm{K} \Rightarrow r_i = r_{1c} = \left(4\pi \cdot 100 \cdot \dfrac{313 - 73}{5{,}827 \cdot 10^{10}} + \dfrac{1}{60000}\right)^{-1} =$

$= 45783\ \mathrm{m} \Rightarrow \boxed{r_{1c} = 45{,}8\ \mathrm{km}}$

Para $T_i = T_{2c} = 0\,^\circ\mathrm{C} = 0 + 273 = 273\ \mathrm{K} \Rightarrow r_i = r_{2c} = \left(4\pi \cdot 100 \cdot \dfrac{273 - 73}{5{,}827 \cdot 10^{10}} + \dfrac{1}{60000}\right)^{-1} =$

$= 47666\ \mathrm{m} \Rightarrow \boxed{r_{2c} = 47{,}7\ \mathrm{km}}$