PRÁCTICO GALICIA 1994

Física-1 Un montacargas está subiendo con una velocidad constante de $1{,}5\ m \cdot s^{-1}$ y un observador en reposo deja caer una pelota desde un punto que se encuentra a una altura de 6,3 m por encima de la plataforma. El coeficiente de restitución entre la pelota y la plataforma es 0,5. Calcular:

1. Cuánto se elevará la pelota por encima (o por debajo) del punto de partida después de su primer bote.
2. El tiempo transcurrido entre el primer y el segundo bote.

Solución:

Tomando como sistema de referencia inercial, uno adosado al montacargas que sube con velocidad constante de $1{,}5\ m s^{-1}$, el problema se reduce a un lanzamiento vertical hacia abajo de la pelota con velocidad inicial $v_0 = 1{,}5\ m/s$ desde una altura $h = 6{,}3\ m$ contra el montacargas, supuesto estático en este marco de referencia, y con un coeficiente de restitución $\varepsilon = 0{,}5$ para los choques inelásticos. Teniendo en cuenta que ε es el cociente entre la velocidad relativa de separación entre pelota y montacargas después de la colisión y la velocidad relativa de acercamiento antes de la colisión, tenemos:

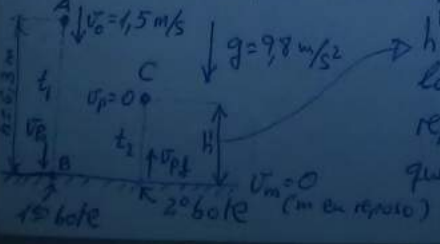
$$\varepsilon = \frac{v_{p_f} - v_{m_f}}{v_{m_0} - v_{p_0}}$$

. Donde "o" $\rightarrow$ justo antes del choque.
"f" $\rightarrow$ justo después del choque.

$v_p \rightarrow$ velocidad de la pelota en nuestro sistema de referencia solidario al montacargas.

$v_m \rightarrow$ velocidad del montacargas en el sistema de referencia móvil con él mismo $\Rightarrow v_{m_0} = v_{m_f} = 0$ (reposo).

Entonces, $\varepsilon = \dfrac{v_{p_f} - 0}{0 - v_{p_0}} \Rightarrow v_{p_0} = \dfrac{-v_{p_f}}{\varepsilon}$. El signo negativo indica que la pelota antes y después del choque se mueve en sentidos contrarios, no obstante, trabajaremos siempre con celeridades positivas.



$\rightarrow h'$ = altura máxima que alcanza, en el primer bote, la pelota respecto del montacargas (supuesto en reposo, pues el sistema de referencia inercial que utilizamos, va ligado a él).

Aplicamos el principio de conservación de la energía entre A y B, justo antes de que se produzca el choque:

$$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 + \cancel{m} g h = \frac{1}{2}\cancel{m} v_{P_0}^2 \therefore v_0^2 + 2gh = v_{P_0}^2 = \frac{v_{P_f}^2}{\varepsilon^2}$$

Efectuamos otro balance de energía mecánica entre B (justo después de producirse el choque) y C (máxima altura respecto del montacargas):

$$E_{C_B} = E_{P_C} \therefore \frac{1}{2}\cancel{m} v_{P_f}^2 = \cancel{m} g h' \therefore 2gh' = v_{P_f}^2 \; \Big\} \; 2gh' = \varepsilon^2(v_0^2 + 2gh) \therefore$$

$$\Rightarrow v_{P_f}^2 = \varepsilon^2(v_0^2 + 2gh)$$

$$\therefore h' = \frac{\varepsilon^2(v_0^2 + 2gh)}{2g} = \underline{\underline{\varepsilon^2\left(\frac{v_0^2}{2g} + h\right)}} = 0{,}5^2\left(\frac{1{,}5^2\ \cancel{m^2}/\cancel{s^2}}{2 \cdot 9{,}8\ \cancel{m}/\cancel{s^2}} + 6{,}3\ m\right) = \underline{\underline{1{,}6037\ m}}$$

Llamamos

$t_1 \rightarrow$ tiempo transcurrido hasta que se produce el 1er bote (de A a B)

$t_2 \rightarrow$ tiempo que pasa desde que se produce el 1er bote hasta que la pelota alcanza h' o también, por simetría, el que transcurre desde que alcanza la cúspide de su trayectoria rectilínea en C, h', hasta que choca por 2ª vez.

Despreciamos el intervalo de tiempo que duran los choques. El tiempo transcurrido entre el 1er y 2º bote, por la simetría del problema, será: $t_{1^{\circ}\text{-}2^{\circ}} = 2t_2$ (subida y bajada de la pelota). Vamos a utilizar, para calcular los tiempos, la siguiente ecuación que se cumple en un MRUA: $s = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)\cdot t \;\therefore\; \underline{\underline{t = \frac{2s}{v_0 + v_f}}}$

(Demostración:

$$\text{MRUA}\begin{cases} v_f = v_0 + a\cdot t \therefore a = \dfrac{v_f - v_0}{t} \\ s = v_0\cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \Big\} \; s = v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_f - v_0}{\cancel{t}}\cdot t^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)\cdot t \;\#)$$

Entonces el tiempo que pasa hasta que se produce el 1er choque:

$t_1 = \frac{2h}{v_0 + v_{P_0}}$ pero del 1er balance energético se deduce $v_{P_0} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

Sustituyendo calculamos $t_1 = \dfrac{2h}{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \dfrac{2 \cdot 6{,}3\ \cancel{m}}{\left(1{,}5 + \sqrt{1{,}5^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}3}\right)\cancel{m}/s} = \underline{\underline{0{,}9911\ s}}$

$$t_2 = \frac{2h'}{0 + v_{P_f}} = \frac{2h'}{v_{P_f}} = \frac{2h'}{\varepsilon v_{P_0}} = \frac{2h'}{\varepsilon\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \frac{\cancel{2}\varepsilon^{\cancel{2}}(v_0^2 + 2gh)}{\cancel{2}g\cancel{\varepsilon}\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \frac{\varepsilon}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh} \therefore$$

$$t_2 = \frac{0{,}5}{9{,}8\ \cancel{m}/s^{\cancel{2}}}\cdot\sqrt{1{,}5^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}3}\ \cancel{m}/\cancel{s} = \underline{0{,}5721\ s}$$

1.) El desplazamiento vertical hacia arriba del montacargas mientras la pelota pasa de A a C será: $s = v_0(t_1 + t_2) = 1{,}5\ m\cancel{s^{-1}}\cdot(0{,}9911 + 0{,}5721)\cancel{s} = 2{,}568\ m$

Entonces la pelota queda a $h - (s + h') = 6{,}3\ m - (2{,}568 + 1{,}6037)\ m = \boxed{2{,}1\ m \text{ por debajo de A}}$

2.) $t_{1^{\circ}\text{-}2^{\circ}} = 2t_2 = 2 \cdot 0{,}5721\ s \therefore \boxed{t_{1^{\circ}\text{-}2^{\circ}} = 1{,}1\ s}$

$\boxed{\text{FÍSICA - 2}}$ Si fuese posible excavar un pozo que atravesara la Tierra a lo largo de su diámetro y se dejase caer en él una masa "m, determinar:

1.) El período de movimiento de dicha masa.

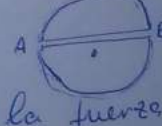
2.) Su velocidad cuando pase por el centro de la Tierra.

(Se prescinde de la resistencia del aire y se supone que la Tierra es una esfera homogénea de densidad "δ" y radio "R".

Solución:

Realmente, es curioso caer en la cuenta de que cualquier túnel recto que una dos puntos de la superficie terrestre da como resultado un movimiento armónico simple (MAS) para la masa "m", asumiendo para la Tierra una esfera perfecta homogénea, sin rozamientos en el túnel. Además el período, T, de dicho movimiento será el mismo independientemente del túnel que imaginemos. Por ejemplo uno como el siguiente que une A y B:

Por la simetría del problema, siempre podemos rotar la figura y acabar con algo como esto $\Longrightarrow$



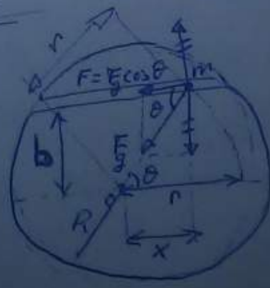
Aplicamos el Teorema de Gauss para calcular la fuerza gravitatoria sobre una masa "m" en el interior de la Tierra, a una distancia r de su centro ($r < R$):

M': masa encerrada por la esfera de radio r

$$\Phi = \vec{g}\cdot\vec{S}_{esfera} = g\cdot 4\pi r^2 \cdot \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -4\pi g r^2$$

$$\Phi = -4\pi G M' \quad . \text{ Entonces } -\cancel{4\pi} g r^2 = -\cancel{4\pi} G M' \therefore g = \frac{GM'}{r^2} \therefore$$

$$\therefore F_g = m g = \frac{GmM'}{r^2}$$ no depende de la corona de masa alrededor de M'.



Lo aplicamos a nuestro caso:

$$\cos\theta = \frac{x}{r}\ ;\ F_g = \frac{GmM'}{r^2}\ ;$$

$$\therefore F = -F_g\cos\theta = -\frac{GmM'}{r^2}\cdot\frac{x}{r} \ \therefore$$

$\therefore \; F = -\dfrac{GmM'}{r^3}x$ el signo negativo indica que la $\vec{F}$ lleva sentido contrario a la elongación $\vec{x}$, en todo momento.

Esfera homogénea: $\delta = cte \Rightarrow$

$\delta \rightarrow \dfrac{\text{masa}}{\text{volumen}} \therefore \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \therefore M' = M\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$

$\therefore M' = M\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$. Sustituyendo en F:

$$F = -\frac{GmM\cancel{r^3}}{\cancel{r^3}\cdot R^3}\cdot x \quad \therefore \quad F = -\underbrace{\frac{GmM}{R^3}}_{=\delta}\cdot x = -Gm\delta\cdot x$$

MAS $\Rightarrow x = A\cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$;

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = A\omega\sqrt{1-\text{sen}^2(\omega t+\varphi_0)} = \omega\sqrt{A^2 - A^2\text{sen}^2(\omega t+\varphi_0)}$$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\text{sen}(\omega t+\varphi_0) = -\omega^2 x \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F = ma = -m\omega^2 x \Rightarrow -\cancel{m}\omega^2 = -G\cancel{m}\delta \therefore \frac{4\pi^2}{T^2} = G\delta \therefore$$

1.) $\therefore \boxed{T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{G\delta}}}$

2.) Centro Tierra $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow v_{máx} = \omega\sqrt{A^2-x^2} = \dfrac{2\pi}{T}\sqrt{R^2-0^2} = \dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{\sqrt{G\cdot\delta}}}\sqrt{R^2}$

$A = R$

$$\boxed{v_{máx} = R\sqrt{G\cdot\delta}}$$

QUÍMICA - 1 A 600K el pentano normal se isomeriza, en presencia de un catalizador adecuado, según las reacciones:

$$\underset{(A)}{CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3} \rightleftharpoons \underset{(B)}{(CH_3)_2-CH-CH_2-CH_3} \rightleftharpoons \underset{(C)}{(CH_3)_2-C-(CH_3)_2}$$

Las entalpías libres de formación a 600K son 33,79 (A), 32,66 (B), y 35,08 (C) kcal/mol. Calcular la composición molar de la mezcla al establecerse el equilibrio completo. Supóngase comportamiento ideal. ($R = 1{,}99$ cal$\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$)

Solución:

Hidrocarburos gaseosos a $600\,K \Rightarrow$ suponemos gases ideales: $P_i V = n_i RT$ ∴

∴ $P_i = \frac{n_i}{V} RT = [i] RT$; $i = A, B, \ldots, C, D, \ldots$

$$aA + bB + \cdots \underset{}{\overset{K_p}{\rightleftharpoons}} cC + dD + \cdots \qquad \Delta n = (c+d+\cdots) - (a+b+\cdots)$$

$$K_p = \frac{P_C^c \cdot P_D^d \cdots}{P_A^a \cdot P_B^b \cdots} = \underbrace{\frac{[C]^c [D]^d \cdots}{[A]^a [B]^b \cdots}}_{K_c} \cdot \frac{(RT)^c (RT)^d \cdots}{(RT)^a (RT)^b \cdots} \therefore K_p = K_c (RT)^{\Delta n}$$

Estequiometría 1:1 para las reacciones de isomerización $\Rightarrow \Delta n = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow K_p = K_c \cdot (RT)^0 \Rightarrow K_p = K_c = K$ = constante de equilibrio

$$\underset{n_A}{A} \overset{K_1}{\rightleftharpoons} \underset{n_B}{B} \; ; \; \Delta G_1^o = \Delta G_{f_B}^o - \Delta G_{f_A}^o = 32{,}66 - 33{,}79 = -1{,}13 \text{ kcal/mol}$$

$$\Delta G_1^o = \underline{-1130} \text{ cal/mol}$$

$$\underset{n_B}{B} \overset{K_2}{\rightleftharpoons} \underset{n_C}{C} \; ; \; \Delta G_2^o = \Delta G_{f_C}^o - \Delta G_{f_B}^o = 35{,}08 - 32{,}66 = 2{,}42 \text{ kcal/mol}$$

$$\Delta G_2^o = \underline{2420} \text{ cal/mol}$$

n_A, n_B, n_C = moles en el equilibrio de A, B y C respectivamente

$\Delta G^o = -RT \ln K$; $R = 1{,}99$ cal/mol·K ; $T = 600\,K$

$$\left.\begin{array}{l} K_1 = e^{-\frac{\Delta G_1^o}{RT}} \; ; \; K_1 = K_{p_1} = K_{c_1} = \frac{[B]}{[A]} = \frac{n_B/V}{n_A/V} = \frac{n_B}{n_A} \\ K_2 = e^{-\frac{\Delta G_2^o}{RT}} \; ; \; K_2 = K_{p_2} = K_{c_2} = \frac{[C]}{[B]} = \frac{n_C/V}{n_B/V} = \frac{n_C}{n_B} \end{array}\right\} \therefore$$

∴ $\frac{n_B}{n_A} = e^{-\frac{\Delta G_1^o}{RT}}$; $\frac{n_C}{n_B} = e^{-\frac{\Delta G_2^o}{RT}}$

Dos ecuaciones con tres incógnitas (n_A, n_B y n_C), necesitamos una más que obtenemos de un balance de materia teniendo en cuenta que son isómeros y la estequiometría es 1:1

$$\underline{n_A + n_B + n_C = n_0} = \text{n}^o \text{ de moles iniciales de A}$$

Despejamos n_A y n_C en función de n_B y sustituimos en la ecuación de balance de materia:

$$\left.\begin{aligned} n_A &= n_B \cdot e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}} \\ n_C &= n_B \cdot e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}} \end{aligned}\right\} \; n_B \cdot e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}} + n_B + n_B \cdot e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}} = n_0 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} n_B &= \frac{n_0}{1 + e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}} + e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}}} \\ n_A &= \frac{n_0\, e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}}}{1 + e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}} + e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}}} \end{aligned}\right\} \quad n_C = \frac{n_0 \cdot e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}}}{1 + e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}} + e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}}}$$

$$X_A = \frac{n_A}{n_A + n_B + n_C} = \frac{n_A}{n_0} = \frac{e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}}}{1 + e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}} + e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}}} = \frac{e^{-\frac{1130}{1{,}99 \cdot 600}}}{1 + e^{-\frac{1130}{1{,}99 \cdot 600}} + e^{-\frac{2420}{1{,}99 \cdot 600}}}$$

$$X_B = \frac{n_B}{n_A + n_B + n_C} = \frac{n_B}{n_0} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}} + e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1130}{1{,}99 \cdot 600}} + e^{-\frac{2420}{1{,}99 \cdot 600}}}$$

$$X_C = \frac{n_C}{n_A + n_B + n_C} = \frac{n_C}{n_0} = \frac{e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}}}{1 + e^{\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}} + e^{-\frac{\Delta G_2^\circ}{RT}}} = \frac{e^{-\frac{2420}{1{,}99 \cdot 600}}}{1 + e^{-\frac{1130}{1{,}99 \cdot 600}} + e^{-\frac{2420}{1{,}99 \cdot 600}}}$$

	COMPOSICIÓN MOLAR DE LA MEZCLA EN EL EQUILIBRIO:
$X_A = 0{,}255 \xrightarrow{\times 100}$	25,5 % de A
$X_B = 0{,}658 \xrightarrow{\times 100}$	65,8 % de B
$X_C = 0{,}087 \xrightarrow{\times 100}$	8,7 % de C
1,000	100,0 %