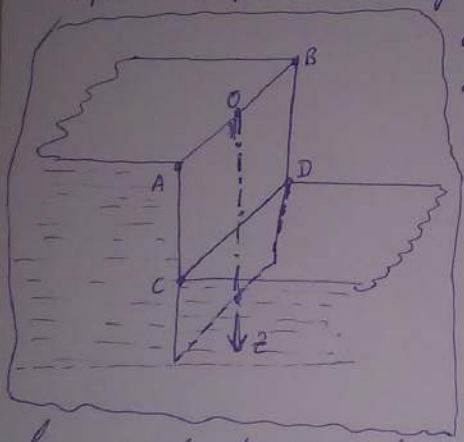
OPOSICIONES MADRID 1994

PROBLEMA Nº 1 Una puerta de esclusa vertical, de anchura $AB = a$, separa dos planos de agua (uno corresponde a AB y el otro a CD) cuya diferencia de alturas es $AC = b$. Considerando que O es el punto medio de AB y que las cotas (descendentes) se miden sobre Oz:



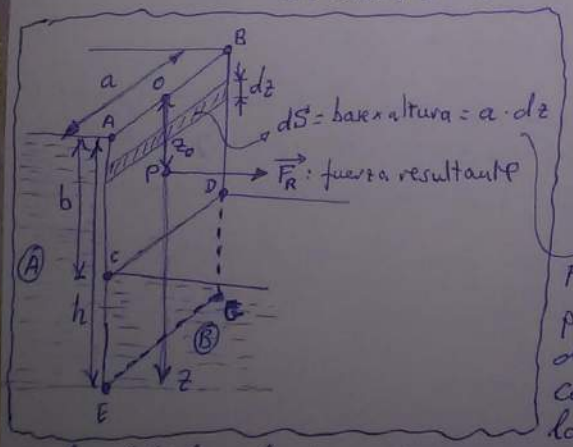
a) Calcular, en función de su distancia z al punto O, el valor de la fuerza presionante df que se ejerce sobre un elemento de la esclusa, de altura dz. Representar geométricamente la variación de df en función de z.

b) Hallar el valor de la resultante F de estas fuerzas elementales.

c) Determinar el punto de aplicación P de la resultante F, calculando su distancia OP al punto O.

Solución:

• a) y b) Denotaremos con h la longitud vertical total de la esclusa $\Rightarrow h = \overline{AE} = \overline{BG}$



dS = base × altura = $a \cdot dz$

La presión sobre la esclusa viene dada por $p = \frac{dF}{dS}$, entonces:

$dF = p \cdot dS = p \cdot a \cdot dz$

Pero hay que considerar dos contribuciones para la presión sobre la esclusa. La debida al plano de agua Ⓐ (que corresponde a AB) que presiona sobre la esclusa de izquierda a derecha, y la debida al plano de agua Ⓑ (que corresponde a CD) que presiona sobre la esclusa de derecha a izquierda, según la figura adjunta. Por lo tanto, es importante tener en cuenta que $P = P_{Ⓐ} - P_{Ⓑ}$. Ahora

analizamos cada contribución a la presión p, sobre la esclusa, utilizando la ecuación fundamental de la hidrostática (en la que despreciaremos la influencia de la presión atmosférica $\Rightarrow p_{atm} \simeq 0$):

$$P_{Ⓐ} = \rho g z \quad \text{para } z \geq 0$$

$$P_{Ⓑ} = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq z \leq b \\ \rho g (z-b) & \text{para } z \geq b \end{cases}$$

$g \rightarrow$ aceleración de la gravedad.
$\rho \rightarrow$ densidad del líquido.

Como $dF = p \cdot dS = p \cdot a \cdot dz = (P_{Ⓐ} - P_{Ⓑ}) \cdot a \cdot dz$, tenemos:

$$dF = \begin{cases} \overbrace{a \rho g z dz}^{(P_{Ⓐ} - P_{Ⓑ} = \rho g z - 0 = \rho g z)} & \text{para } 0 \leq z \leq b \\ \underbrace{a \rho g b dz}_{(P_{Ⓐ} - P_{Ⓑ} = \rho g z - \rho g (z-b) = \rho g b)} & \text{para } b \leq z \leq h \end{cases}$$

$$\boxed{dF = \begin{cases} a \rho g z dz \; ; & 0 \leq z \leq b \\ a \rho g b dz \; ; & b \leq z \leq h \end{cases}}$$

Para calcular la fuerza presionante resultante sobre la esclusa, sumamos todas las dF, es decir, integramos la función anterior definida a trozos: $F_R = \int_0^h dF = a\rho g \int_0^b z\, dz + a \rho g b \int_b^h dz = a \rho g \frac{b^2}{2} + a \rho g b (h-b) =$

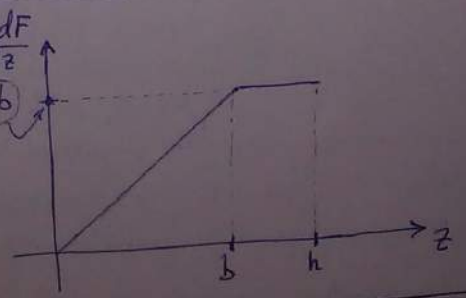
$$= \rho g a b \left(\frac{b}{2} + h - b \right) \Rightarrow \boxed{F_R = \frac{\rho g a b}{2} (2h - b)}$$

dirección: paralela a los planos de líquido. (ver figura)
sentido: de izquierda a derecha

* Caso particular: solamente si el plano de agua Ⓑ tiene una profundidad despreciable frente a la longitud vertical de esclusa $\Rightarrow h \simeq b$ y entonces quedará $F_R \simeq \frac{\rho g a b}{2} (2b - b) = \frac{\rho g a b^2}{2}$, pero esto no tiene porqué ser así.

* En la representación gráfica nos piden como cambia F respecto de z con la profundidad:

$$\frac{dF}{dz} = \begin{cases} a \rho g z \; ; & 0 \leq z \leq b \\ a \rho g b \; ; & b \leq z \leq h \end{cases}$$



c) Para resolver este apartado basta tener en cuenta que el momento de la resultante respecto a O : $M = z_0 \cdot F_R \cdot \cancel{\operatorname{sen} 90^\circ} = z_0 F_R$, es igual a la resultante de los momentos respecto a O, de todas las fuerzas infinitesimales dF; entonces:

Por un lado: $M = z_0 F_R = \boxed{z_0 \dfrac{\rho g a b}{2}(2h-b)}$

Por otro lado: $M = \int_0^h dM = \int_0^h z \cdot dF \cdot \cancel{\operatorname{sen} 90^\circ}$. Pero tenemos que integrar la función por trozos:

$$M = \int_0^b z\,dF + \int_b^h z\,dF = a\rho g \int_0^b z^2 dz + a\rho g b \int_b^h z\,dz \therefore$$

$$\therefore M = a\rho g \frac{b^3}{3} + a\rho g b \frac{h^2-b^2}{2} = a\rho g b \left(\frac{b^3}{3} + \frac{h^2-b^2}{2}\right) =$$

$$= a\rho g b \frac{2b^2+3h^2-3b^2}{6} = \boxed{a\rho g b \frac{3h^2-b^2}{6}}$$

Igualando las dos últimas expresiones recuadradas llegamos al cálculo de z_0 (pto. de aplicación) pedido:

$$z_0 \cdot \frac{\cancel{\rho g a b}}{\cancel{2}}(2h-b) = \cancel{a\rho g b} \cdot \frac{3h^2-b^2}{3 \cdot \cancel{2}} \therefore \boxed{z_0 = \overline{OP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3h^2-b^2}{2h-b}}$$

* Caso particular: solamente si el plano de agua (B) tiene una profundidad despreciable frente a la longitud vertical de esclusa $\Rightarrow h \simeq b$, entonces quedará $z_0 \simeq \frac{1}{3} \cdot \frac{3b^2-b^2}{2b-b} = \frac{1}{3}\frac{2b^{\cancel{2}}}{\cancel{b}} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0 \simeq \frac{2}{3} b$.