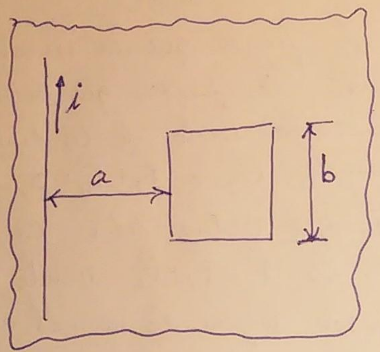
PRÁCTICO GALICIA (1994)

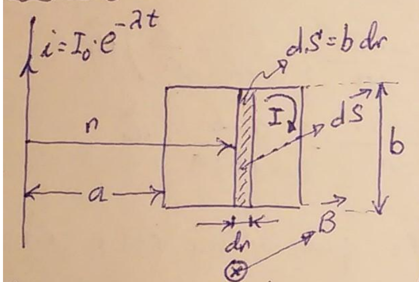
PROBLEMA DE FÍSICA Nº3

Se dispone de un conductor rectilíneo de longitud infinita que transporta una corriente $i = I_0 \cdot e^{-\lambda t}$ en sus proximidades hay una espira cuadrada, tal como se indica en la figura. Calcular:



1. La f.e.m. inducida en la espira.
2. El coeficiente de inducción mutuo.
3. La fuerza mínima (en módulo, dirección, sentido y punto de aplicación) en función del tiempo, que habría de aplicarse sobre la espira para evitar que se mueva.

Solución:



Ley de Biot y Savart: $B = \frac{\mu i}{2\pi r}$

1.) Flujo magnético que atraviesa la espira debido a la corriente i:

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B\, dS \underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = \frac{\mu i}{2\pi r} \cdot b \cdot dr$$

$$\Phi = \frac{\mu i b}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu i b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

Ley de Faraday - Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu b}{2\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{di}{dt} \quad \therefore$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_0 \cdot e^{-\lambda t}\right) = -\lambda I_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{f.e.m. inducida} = \mathcal{E} = \frac{\lambda \mu I_0 b \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{2\pi} \cdot e^{-\lambda t}}$$

Aunque no lo piden, si la resistencia de la espira es R, la intensidad de la corriente inducida será: $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\lambda \mu I_0 b \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)}{2\pi R} \cdot e^{-\lambda t}$

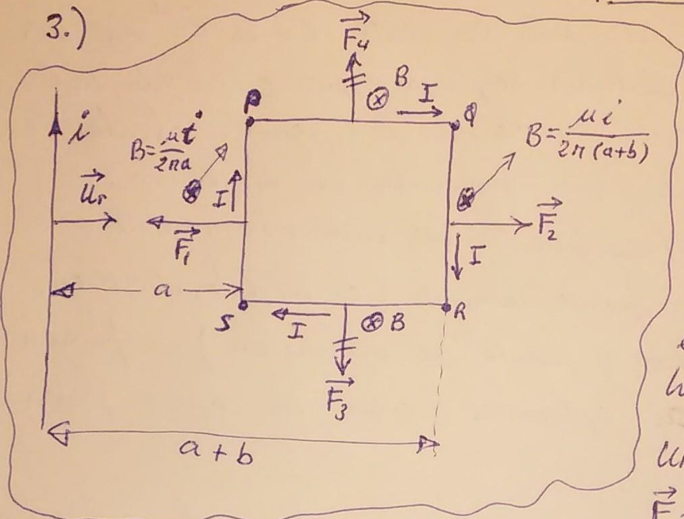
De acuerdo con la ley de Lenz, como el flujo del campo magnético va disminuyendo exponencialmente, la corriente inducida ha de ser tal que se oponga al decrecimiento del campo, por tanto su sentido ha de ser el de las agujas del reloj.

2.) Circuito 1: hilo rectilíneo. $I_1 = i = I_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Circuito 2: espira cuadrada. $\Phi_2 = \frac{\mu i b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$ } Coeficiente de inducción mutua $= M = \frac{\Phi_2}{I_1}$ ∴

$$\therefore M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\frac{\mu \cancel{i} b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\cancel{i}} \quad \therefore \quad \boxed{M = \frac{\mu b}{2\pi} \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$

3.)



En la figura quedan esquematizadas las fuerzas que actúan sobre cada lado de la espira cuadrada. Como $\vec{F_3}+\vec{F_4}=0$, la fuerza que actúa sobre la espira es $\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$ siendo $\vec{u_r}$ el versor según la normal al hilo: $\vec{F}=(F_2-F_1)\vec{u_r}$

Utilizando la fuerza de Lorentz: $\vec{F}=I\vec{L}\times\vec{B}$ y aplicándola a los ($F = ILB \sin 90°$)

tramos $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$: $F_1 = Ib\frac{\mu i}{2\pi a}$

$F_2 = Ib\frac{\mu i}{2\pi(a+b)}$

$$\therefore \vec{F} = \frac{\mu b I i}{2\pi}\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}\right)\vec{u_r} = \frac{\mu b I i}{2\pi}\,\frac{\cancel{a}-\cancel{a}-b}{(a+b)a}\cdot\vec{u_r}$$

Entonces la fuerza resultante de Lorentz que actúa sobre la espira será (sustituyendo I e i):

$$\vec{F} = -\frac{\mu b^2}{2\pi a(a+b)}\cdot\underbrace{\frac{\lambda\mu I_0 b \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}{2\pi R}\cdot e^{-\lambda t}}_{I}\cdot\underbrace{I_0\cdot e^{-\lambda t}}_{i}\cdot\vec{u_r}$$

$\vec{F} = -\frac{\lambda\mu^2 I_0^2}{2\pi}\cdot\frac{b^3\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}{a(a+b)}\cdot e^{-2\lambda t}\cdot\vec{u_r}$; que es la fuerza magnética con la que se ve atraída la espira, en función del tiempo, por el hilo (realmente es una interacción entre hilo y espira pero vamos a suponer el hilo fijo). Entonces nosotros tendremos que realizar, para que no se mueva, una fuerza igual en módulo y dirección pero de sentido contrario:

$$\boxed{\vec{F} = +\frac{\lambda\mu^2 I_0^2}{2\pi}\cdot\frac{b^3\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}{a(a+b)}\cdot e^{-2\lambda t}\cdot\vec{u_r}}$$

Para evitar giros de la espira, el punto de aplicación de $\vec{F}$ estaría en la mitad del segmento $\overline{QR}$. (Se podría pensar en aplicarla en el punto medio de $\overline{PS}$ pero es un punto de equilibrio inestable, cualquier pequeña perturbación podría hacer rotar la espira como una puerta alrededor de la bisagra $\overline{PS}$.

PRÁCTICO GALICIA (1994)

PROBLEMA DE FÍSICA Nº 1 Una esfera metálica de 8 gramos se encuentra suspendida de un hilo de 1m de longitud y se le suministra una carga $q = 2\cdot 10^{-5}\,C$. Determinar:

1.) ¿Qué período de oscilación tendrá la esfera al situarla en un campo eléctrico horizontal y uniforme $E = 4000\,\frac{N}{C}$?

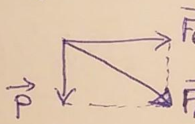
2.) Suponga que el campo eléctrico está creado por un condensador plano. ¿Cómo variará el período de oscilación si se aumenta la distancia entre las armaduras? Razonar la respuesta.

Solución:

• 1.) fuerza eléctrica $= \vec{F_e} = q\vec{E} = cte.$ porque $\vec{E} = cte$ (campo uniforme)

peso de la bolita $= \vec{P} = m\vec{g} = cte.$ porque $\vec{g} \simeq cte$ (despreciamos pequeñas variaciones locales)

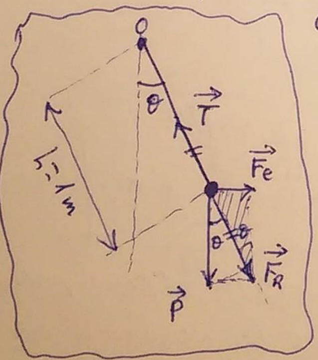
Entonces $\vec{F_R} = \vec{P} + \vec{F_e} = cte$, además $\vec{P}$ y $\vec{F_e}$ siempre forman un ángulo de 90°:



Th. Pitágoras: $F_R^2 = P^2 + F_e^2 \therefore F_R = (P^2 + F_e^2)^{1/2} \therefore$

$\therefore F_R = [(mg)^2 + (qE)^2]^{1/2}$

En la posición de equilibrio la resultante $\vec{F_R}$ se ve exactamente compensada con la tensión en el hilo (ver figura):



$\theta \rightarrow$ ángulo de equilibrio estático

$|\vec{E}| = 4000\,\frac{N}{C}$

$g = 9{,}8\,m/s^2 \simeq 10\,m/s^2$

$m = 8\,g = 0{,}008\,kg$

$q = 2\cdot 10^{-5}\,C$

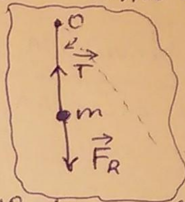
Aunque no lo piden, podemos calcular el ángulo de equilibrio θ mirando en la figura el triángulo rayado:

$$tg\theta = \frac{F_e}{P} = \frac{qE}{mg}$$

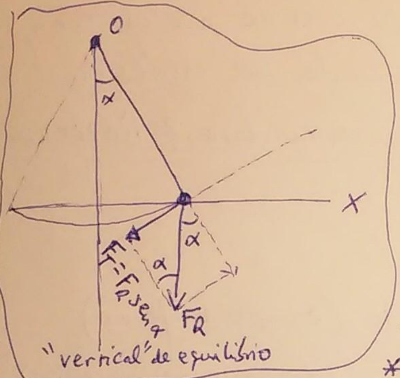
Puesto que nos dan los datos con una cifra significativa, también tomamos g así: $g \simeq 10\,m/s^2 \therefore tg\theta = \frac{2\cdot 10^{-5}\,\cancel{C}\cdot 4000\,\cancel{N/C}}{0{,}008\,\cancel{kg}\cdot 10\,\cancel{m/s^2}} = 1 \Rightarrow \theta = arctg\,1 = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ por lo que en nuestro caso particular $F_e = P$, es decir, el triángulo rayado en la figura es un triángulo rectángulo isósceles.

Para aclarar mejor el fenómeno que vamos a tratar, giramos nuestro diagrama de cuerpo libre un ángulo θ (en nuestro caso $45°$) en el sentido de las agujas del reloj:



Al desplazar m un pequeño ángulo α, de su posición de equilibrio, comenzará a oscilar alrededor de la misma como si de un péndulo simple, corriente y moliente, se tratase, ya que $\vec{F_R}$ como hemos demostrado es constante en módulo, dirección y sentido. Vamos a comprobar que dichas oscilaciones, alrededor de la posición de equilibrio, siguen el patrón de un movimiento vibratorio armónico simple si el ángulo de oscilación α es pequeño (no más de $15°$ ó $20°$). Esto implica:



* $\operatorname{sen}\alpha \simeq \alpha$ (en radianes)
* El arco s que describe m y la cuerda x en el eje perpendicular a la "vertical" de equilibrio tienden a igualarse $\Rightarrow s \simeq x$
* Se puede considerar que la trayectoria de m es rectilínea y "horizontal" (según dibujo adjunto) y la elongación viene dada por la separación x a la "vertical" de equilibrio.

Entonces: $F_T = F_R \cdot \operatorname{sen}\alpha \simeq F_R \cdot \alpha = F_R \cdot \frac{s}{L} \simeq F_R \cdot \frac{x}{L} = \left[(mg)^2 + (qE)^2\right]^{1/2} \cdot \frac{x}{L}$

$\begin{matrix}\text{ángulo} \\ \text{(en rad)}\end{matrix} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} \therefore \alpha = \frac{s}{L}$; arco $\simeq$ cuerda $s \simeq x$

Como $F_T = -m\,a_T$ $\therefore$ $\left[(mg)^2 + (qE)^2\right]^{1/2} \cdot \frac{x}{L} = -ma$ $\therefore$

la fuerza se opone siempre al movimiento de m.

$a_N \simeq 0 \Rightarrow a \simeq a_T$

$$\therefore a = -\frac{\left[(mg)^2 + (qE)^2\right]^{1/2}}{mL} \cdot x \quad \therefore \quad \boxed{a = -\frac{\left[g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2\right]^{1/2}}{L} \cdot x}$$

Esta aceleración se corresponde con la de un MAS como podemos verificar derivando respecto del tiempo dos veces la ecuación de su movimiento: $x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

elongación, amplitud, pulsación o frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, tiempo, cte. de fase, $T \rightarrow$ período.

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \Longrightarrow \boxed{a = -\omega^2 x}$$

Comparando las dos expresiones recuadradas llegamos a:

$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\left[g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2\right]^{1/2}}{L}$. Despejamos finalmente el período:

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\left[g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2\right]^{1/2}}}}$$

En nuestro caso particular $\theta_{equilibrio} = 45^\circ \Rightarrow P = F_E \Rightarrow mg = qE$ ∴

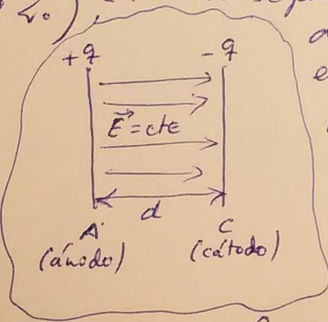
∴ $T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{\left[(mg)^2 + (qE)^2\right]^{1/2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{\left[2(qE)^2\right]^{1/2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{qE\sqrt{2}}}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}008\,\cancel{kg} \cdot 1\,\cancel{m}}{2 \cdot 10^{-5}\,\cancel{C} \cdot 4000\,\frac{\cancel{kg} \cdot \cancel{m}/s^2}{\cancel{C}} \sqrt{2}}}$ ∴ $\boxed{T = 1{,}67\,s}$

Afinando un poquito más con $g = 9{,}8\,m/s^2$:

$T = 2\pi \sqrt{\frac{1\,\cancel{m}}{\left[9{,}8^2 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 4000}{0{,}008}\right)^2\right]^{1/2} \cancel{m}/s^2}}$ ∴ $\boxed{T = 1{,}68\,s}$

• 2.) En este segundo apartado el $\vec{E} = cte.$ se crea entre las placas de un condensador plano. Puesto que el campo eléctrico es conservativo $\Rightarrow E_{P_A} - E_{P_C} = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde E_P = energía potencial eléctrica. Expresando la ecuación por unidad de carga transportada por el campo del ánodo al cátodo: $\frac{E_{PA}}{q} - \frac{E_{PC}}{q} = \int_A^C \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r}$



Teniendo en cuenta que el potencial eléctrico es $V = \frac{E_P}{q}$ y que el campo eléctrico es $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, la ecuación queda: $V_A - V_C = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Calculando la integral en nuestro caso particular con $\vec{E} = cte$ y $\vec{E}$ paralelo a $d\vec{r} \Rightarrow V_A - V_C = E \cdot d$ ∴ $\left| E = \frac{V_A - V_C}{d} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ luego al aumentar la distancia entre las armaduras (manteniendo constante la tensión entre ellas), aumenta el denominador de la fracción anterior y disminuye E. En consecuencia, según la ecuación que dedujimos $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\left[g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2\right]^{1/2}}} \Rightarrow$ al disminuir E, el denominador de la fracción disminuye luego el valor de la raíz cuadrada aumenta y entonces concluimos que

EL PERÍODO DE OSCILACIÓN T AUMENTA AL SEPARAR ENTRE SÍ LAS ARMADURAS DEL CONDENSADOR PLANO.