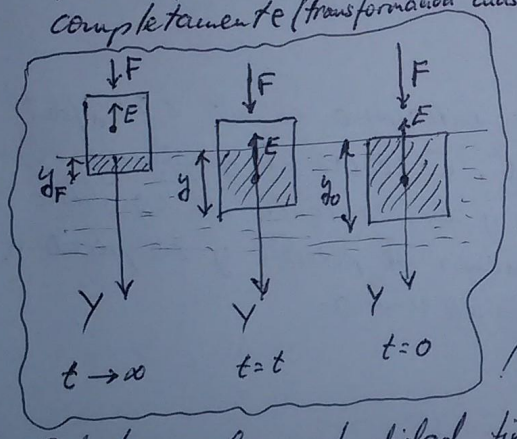
OPOS MADRID 1996

PROBLEMA Nº 2 Un cilindro de 30 cm² de base y 2 dm de altura se sumerge en un líquido de densidad 1,5 g/cm³, de modo que su generatriz quede vertical y su base superior coincidiendo con la superficie libre del líquido. Se suelta el cilindro y éste, tras un movimiento armónico amortiguado, queda en reposo, emergiendo sobre el líquido pues su densidad es tres veces menor. Calcule el trabajo realizado desde que se soltó el cilindro hasta que quedó finalmente en reposo.

Solución:

El trabajo realizado sobre el cilindro es energía que se disipa por fricción con el líquido y es igual al trabajo que tendríamos que realizar contra el empuje de Arquímedes para que el cilindro pase de estar en equilibrio a sumergirse completamente (transformación cuasiestática).



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F \underbrace{\cos 0^\circ}_{1} dr = \int_{y_F}^{y_0} E\, dy$$

Principio de Arquímedes:

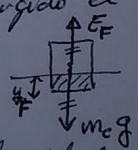
E = empuje hidrostático = peso del fluido desalojado

$$E = m g = \rho V g = \rho S g y$$

$\rho = \frac{m}{V}$; $m = \rho V$; $V = Sy$ = volumen del cilindro sumergido

ρ → densidad del líquido.

Calculamos la profundidad final con la que queda sumergido el cilindro, en el equilibrio final se cumple peso = empuje



$m_c g = m g$ ∴ $\rho_c V_c = \rho V$ ∴ $\rho_c \cancel{S} y_0 = \rho \cancel{S} y_F$. Como la densidad del líquido es el triple de la del cilindro: $\cancel{\rho_c} y_0 = 3 \cancel{\rho_c} y_F$ ∴ $y_F = \frac{y_0}{3}$

masa de líquido desalojado; masa del cilindro

Sustituyendo calculamos la integral: $W = \rho S g \int_{y_0/3}^{y_0} y\, dy = \rho S g \left(y_0^2 - \frac{y_0^2}{9} \right) \cdot \frac{1}{2}$

$\rho = 1{,}5 \frac{g}{cm^3} = 1500 \frac{kg}{m^3}$; $S = 30\, cm^2 = 0{,}0030\, m^2$

$g = 9{,}8\, m/s^2$

$y_0 = 2\, dm = 0{,}2\, m$

$$W = \frac{4}{9} \rho S g y_0^2 = \frac{4}{9} \cdot 1500 \frac{kg}{m^3} \cdot 3 \cdot 10^{-3} m^2 \cdot 9{,}8\, m/s^2 \cdot 0{,}2^2\, m^2$$

$$\boxed{W = 0{,}78\, J}$$