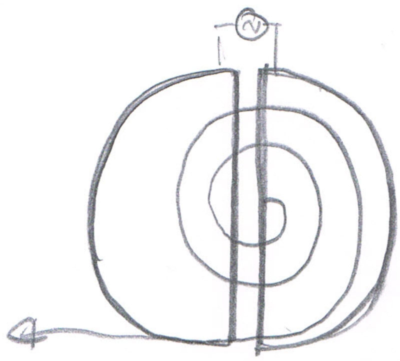
2.- Sea un ciclotrón de 45 cm de radio que está bajo un campo magnético de 6.10^{-3}T, la diferencia de potencial entre las dos Ds es de 100v. El ciclotrón acelera protones. Determinar razonadamente:

a) La frecuencia de resonancia del ciclotrón

b) ¿Cuánto valen los radios correspondientes a las trayectorias en cada D? ¿Cuántas veces será acelerado el protón antes de salir del ciclotrón?

c) ¿Cuál será su energía final en eV? Haga una representación del voltaje aplicado en f(t). Masa del protón $1,6.10^{-27}$Kg.



$R = 0'45\,m$

$\vec{B} = 6\times10^{-3}\,T$

$\Delta V = 100\,V$

Tenemos un protón dentro de un ciclotrón, el cual va a ser acelerado gracias a una diferencia de potencial. Al estar sometido a un campo magnético, seguirá una trayectoria circular (se obvia un campo distinto a 90°, que daría trayectoria helicoidal)

Cada vez que el protón abandona una "D" y entra en la otra, se invierte la polaridad del campo eléctrico que crea la d.d.p. a fin de acelerar cada vez: así, el protón es acelerado cada media vuelta.

a) La frecuencia del ciclotrón coincidirá con la frecuencia de giro del protón; para hacer coincidir cada entrada en la D con una aceleración. (Obviamente, el cambio de polaridad debe hacerse cada media vuelta, o sea una frecuencia doble a la de giro).

Entrada de carga en campo magnético:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow F_{Lorentz} = m \cdot a_{cent.} \Rightarrow \boxed{q v B = m \frac{v^2}{R}}$$

$$q B = m \frac{v}{R} \rightarrow \boxed{R = \frac{m v}{q B}}$$ Radio de trayectoria.

Pero: $\frac{v}{R} = \omega \rightarrow q B = m \omega \Rightarrow q B = m \, 2\pi f \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{q B}{2 \pi m}}$$ frecuencia de giro

Sustituyendo valores:

$$f = \frac{1'6 \times 10^{-19} \cdot 6 \times 10^{-3}}{2\pi \cdot 1'6 \times 10^{-27}} = \boxed{95492'9 \ Hz}$$

Esta es la frecuencia de giro del protón (que no depende de la velocidad; como vemos, es la misma f en todo el tiempo en el que el protón estará dentro del ciclotrón).

Si con "frecuencia de resonancia del ciclotrón" se refieren a la frecuencia a la cual debe cambiar la polaridad, el resultado será el doble de esta frecuencia, para así coincidir con la entrada en la siguiente "D"

b) Radios en cada D.

Al aumentar la energía gracias a la d.d.p. aumentará la v del protón, y con ella, el radio de giro.

El protón saldrá del ciclotrón cuando el radio de su trayectoria sea igual al del ciclotrón.

Recordemos: $\boxed{R = \dfrac{m\,v}{q\,B}}$

Empieza el viaje. La d.d.p. acelera al electrón, de tal forma que:

$\boxed{q\,\Delta V = \Delta E_c}$ $\boxed{q\,\Delta V = \dfrac{1}{2} m\,(v_f^2 - v_i^2)}$

Primer "empujón" $\rightarrow$ $1'6\times10^{-19} \cdot 100 = \dfrac{1}{2}\, 1'6\times10^{-27}\,(V_f^2 - 0^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad V_{f_1} = \sqrt{\frac{2 \times 1'6\times10^{-19} \cdot 100}{1'6\times10^{-27}}} = \sqrt{2\times10^{10}} = \boxed{141421'35 \ m/s}$$

Este dato es relevante, puesto que vemos que $141421'35 \ll 3\times10^{8}$

El protón se mueve a velocidad bastante menor que la de la luz, por lo que podemos despreciar los efectos relativistas que complicarían el problema bastante (el protón empezaría a "enroscarse" y a variar el R)

El protón hace la primera "D" con radio:

$$R_1 = \frac{1'6\times10^{-27} \cdot 141421'35}{1'6\times10^{-19} \cdot 6\times10^{-3}} = \underline{0'2357 \ m}$$

Aún no sale $0'23 < 0'45$

Pasa a la 2ª "D" con un nuevo "empujón" de d.d.p.

$$1'6\times10^{-19} \cdot 100 = \frac{1}{2}\, 1'6\times10^{-27}\,(V_{f_2}^2 - 141421'35^2)$$

$$V_{f_2}^2 = 4\times10^{10} \Rightarrow \quad V_{f_2} = 200.000 \ m/s \ll 3\times10^{8} \ m/s$$

y el radio en la 2ª "D"

$$R_2 = \frac{1'6\times10^{-27} \cdot 200.000}{1'6\times10^{-19}\cdot 6\times10^{-3}} = 0'\overline{3}\ m. \quad < 0'45\ m.$$

Seguimos sin salir, y primera vuelta dada.

Vamos a por la 3ª "D".

¡Empujón! → $1'6\times10^{-19}\cdot 100 = \frac{1}{2}\, 1'6\times10^{-27}\,(V_{f_3}^2 - 200.000^2)$

$$V_{f_3}^2 = 6\times10^{10} = 244948'97\ m/s \quad < 3\times10^8\ m/s$$

↳ (Aquí es donde uno se da cuenta que el cuadrado de la velocidad va 2×10^{10}, 4×10^{10}, 6×10^{10} etc).

$$R_3 = \frac{1'6\times10^{-27}\cdot 244948'97}{1'6\times10^{-19}\cdot 6\times10^{-3}} = 0'408\ m \quad < 0'45\ m. \quad \text{No sale.}$$

y ya por fin, la 4ª "D"

El empujón nos pondrá a $V_{f_4}^2 = 8\times10^{10} \rightarrow V_{f_4} = 282842'7\ m/s$

y el radio: $R_4 = \frac{1'6\times10^{-27}\cdot 282842'7}{1'6\times10^{-19}\cdot 6\times10^{-3}} = 0'471\ m \quad > 0'45\ m.$

¡Salió!

Por tanto, el protón dará más de 1 vuelta, y menos de 2, y será acelerado 4 veces.

c) E final: La energía final, si no hay pérdidas de energía por rozamientos o algún tipo de histéresis, será

$$4q\Delta V \Rightarrow 4\cdot 1'6\times10^{-19}\cdot 100 \rightarrow 6'4\times10^{-17}\ J = \boxed{400\ eV}$$

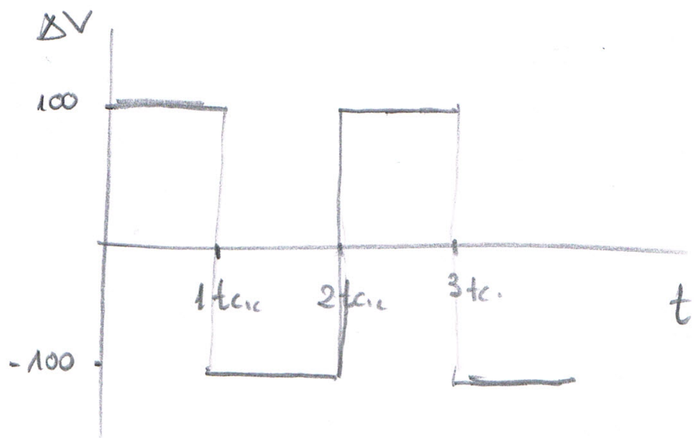
Podemos calcular el tiempo que tarda el protón en cambiar de "D"

$$f = 95492'9 Hz \rightarrow T = 95492'9^{-1} = 1'047 \times 10^{-5}\ s$$

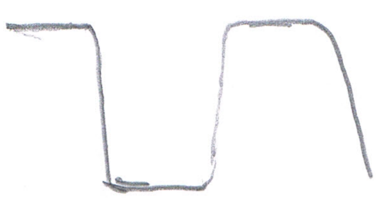
Tardará la mitad en cambiar de "D".

$$\boxed{t = \frac{1'047 \times 10^{-5}}{2}\ s.} \equiv t_{ac}$$

Cada intervalo de este t, la d.d.p debe cambiar su polaridad.



Obviamente, habrá un transitorio de tiempo entre cada salto, por lo que la "pinta" sería un poco tal que así



etc