

PROBLEMAS DE FÍSICA, OPOSICIÓN ARAGÓN 2015.

MODELO B

PROBLEMA N°2 Un globo rígido sin pérdida de calor, de volumen 1000 L, tiene un peso de 250 g en el aire y en su parte inferior abierta se coloca un algodón empapado en alcohol que se enciende. El alcohol arde totalmente y el algodón cae al suelo y en ese momento se suelta el globo que asciende con una aceleración de ~~1,2 m/s²~~ 1,2 m/s².

Calcular la densidad del aire del interior del globo y la masa de alcohol consumida.

Datos: $Q(\text{alcohol}) = 16,72 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$; $P = 70 \text{ cm de Hg}$; $t = 27^\circ\text{C}$; $M(\text{aire}) = 28,97 \text{ u}$; $d(\text{aire en condiciones normales}) = 1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $C_p(\text{aire}) = 29,26 \text{ J} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Se suponen despreciables los gases emitidos en la combustión. (1,5 puntos).

Solución:

empuje = $E = m_{\text{ex}} g$ (Principio de Arquímedes).

$m_g = \text{masa del material del globo}$
 $m_{\text{in}} = \text{masa de aire en el interior del globo.}$

$m = m_g + m_{\text{in}} = \text{masa total del globo.}$

$L = \text{calor de combustión del alcohol} = 16,72 \text{ kJ/g} \cdot 1000 \frac{\text{J}}{\text{kJ}} \cdot \frac{1000 \text{ g}}{\text{kg}}$
 $L = 1,672 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$; $V = 1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$

abierto

peso = $P = m g = (m_g + m_{\text{in}}) g$; masa molar del aire

in → interior del globo } $P_{\text{ex}} = 70 \text{ cm Hg}$; $M = 28,97 \text{ g/mol} \cdot 0,001 \text{ kg/g} = 0,02897 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
 ex → exterior del globo } $t_{\text{ex}} = 27^\circ\text{C} \therefore T_{\text{ex}} = 273,15 + 27 = 300,15 \text{ K}$

C.N. → condiciones normales; $\rho \rightarrow \text{densidad del aire}$

$\rho_{\text{CN}} = 1,293 \text{ kg/m}^3$ a $P_{\text{CN}} = 1 \text{ atm} = 76 \text{ cm Hg}$ y $T_{\text{CN}} = 273,15 \text{ K}$ ($t_{\text{CN}} = 0^\circ\text{C}$)

$C_p = 29,26 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$; $m_{\text{ex}} = \text{masa de aire exterior desplazado por el volumen, } V, \text{ del globo.}$

peso del globo en el aire = $P - E = m g - m_{\text{ex}} g = (m_g + m_{\text{in}}) g - m_{\text{ex}} g$

En este caso el aire del interior todavía no se ha calentado y entonces se cumple $m_{\text{in}} = m_{\text{ex}} \therefore \left(\frac{\text{peso del globo en el aire}}{g} \right) = (m_g + m_{\text{ex}}) g - m_{\text{ex}} g = m_g g$; $m_g = 250 \text{ g} = 0,250 \text{ kg}$

Aplicamos la 2ª ley de Newton al ascenso del globo:

$$E - P = m a \quad \therefore m_{ex} g - m g = m a \quad \therefore \left(\frac{m_{ex}}{m} - 1 \right) g = a \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{m_{ex}}{m} = \frac{a}{g} + 1 \quad \therefore \frac{m_{ex}}{m_{g} + m_{in}} = \frac{a}{g} + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \quad \therefore m = \rho \cdot V \\ m_{in} = \rho_{in} \cdot V \\ m_{ex} = \rho_{ex} \cdot V \end{array} \right\} \frac{\rho_{ex} \cdot V}{m_{g} + \rho_{in} \cdot V} = 1 + \frac{a}{g} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\rho_{ex} \cdot V}{1 + \frac{a}{g}} = m_g + \rho_{in} \cdot V \quad \therefore \rho_{in} = \frac{\rho_{ex}}{1 + \frac{a}{g}} - \frac{m_g}{V} \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Suponemos gases perfectos y utilizamos su ecuación para calcular ρ_{ex} en función de ρ_{in} : $PV = nRT = \frac{m}{M} RT \quad \therefore PM = \frac{m}{V} RT = \rho RT \quad \therefore$

$$\therefore \frac{P}{\rho T} = \frac{R}{M} = \text{constante} \quad \therefore \frac{P_{ex}}{\rho_{ex} T_{ex}} = \frac{P_{in}}{\rho_{in} T_{in}} \quad \therefore \rho_{ex} = \rho_{in} \cdot \frac{P_{ex} \cdot T_{in}}{P_{in} \cdot T_{ex}}$$

$$\therefore \rho_{in} = \frac{\rho_{ex} \cdot \frac{P_{ex} \cdot T_{in}}{P_{in} \cdot T_{ex}}}{1 + \frac{a}{g}} - \frac{m_g}{V} = \frac{1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{70 \text{ cmHg} \cdot 273,15 \text{ K}}{76 \text{ cmHg} \cdot 300,15 \text{ K}} - \frac{0,250 \text{ kg}}{1 \text{ m}^3}}{1 + \frac{1,2 \text{ m/s}^2}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 0,71556 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$Q \rightarrow$ calor transferido al aire del interior del globo.

$$Q = m_{al} \cdot L$$

$$Q = n_{in} C_p (T_{in} - T_{ex}) = \frac{m_{in}}{M} C_p (T_{in} - T_{ex})$$

Puesto que el globo está abierto en su parte inferior $P_{ex} = P_{in} \Rightarrow Q = \Delta H = n C_p \Delta T$

Por otro lado $m_{in} = \rho_{in} \cdot V$. Para determinar la temperatura en el interior del globo, T_{in} , volvemos a utilizar la ecuación de los gases ideales en la forma $\frac{P}{\rho T} = \frac{R}{M} = \text{constante}$.

$$\therefore \frac{P_{ex}}{\rho_{ex} T_{ex}} = \frac{P_{in}}{\rho_{in} T_{in}} \quad \left. \begin{array}{l} T_{in} = T_{ex} \cdot \frac{\rho_{ex} \cdot P_{in}}{\rho_{in} \cdot P_{ex}} \\ \text{Sustituyendo todas estas} \end{array} \right\}$$

abierta en su parte inferior $P_{ex} = P_{in}$ expresiones en la de variación de entalpía queda:

$$m_{al} \cdot L = \frac{\rho_{in} \cdot V}{M} C_p \left(T_{ex} \cdot \frac{\rho_{ex} \cdot P_{in}}{\rho_{in} \cdot P_{ex}} - T_{ex} \right) = \frac{C_p \cdot V}{M} \left(T_{ex} \cdot \frac{\rho_{ex} \cdot P_{in}}{\rho_{in} \cdot P_{ex}} - T_{ex} \cdot \rho_{in} \right)$$

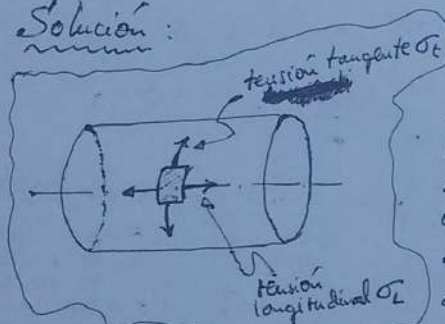
$$m_{al} = \frac{C_p \cdot V}{M \cdot L} \left(T_{ex} \cdot \frac{\rho_{ex} \cdot P_{in}}{\rho_{in} \cdot P_{ex}} - T_{ex} \cdot \rho_{in} \right) = \frac{29,26 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 1 \text{ m}^3}{0,02897 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 1,672 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} \cdot \left(300,15 \text{ K} \cdot \frac{1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 70 \text{ cmHg}}{76 \text{ cmHg}} - 300,15 \text{ K} \cdot 0,71556 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

$$m_{alcohol} = 6,6765 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad \therefore \quad m_{alcohol} = 6,7 \text{ g}$$

$\times 1000 \text{ g/kg}$

PROBLEMA N° 4 Sea un depósito cilíndrico construido en chapa flexible y apoyado en el suelo, que se llena de un líquido. ¿De qué variables depende la tensión que soportan las paredes? Deducir una expresión que las relacione.

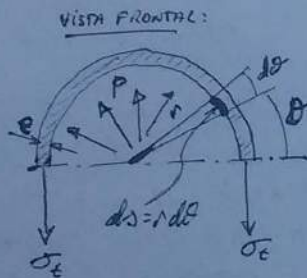
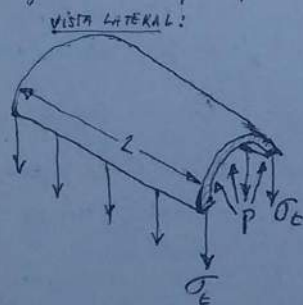
Solución:



Comenzamos analizando la naturaleza de las tensiones en la pared de un cilindro hueco ~~horizontal~~ horizontal como el representado en el croquis adjunto que está sometido a una presión interna uniforme y constante. En las paredes se producen tensiones normales en dos direcciones. Las que actúan en la dirección del eje del cilindro se denominan axiales,

o longitudinales, y las que lo hacen en una dirección perpendicular, tensiones tangentes o tangenciales o circunferenciales. Suponemos que estas tensiones actúan sobre un elemento como el representado, y lo hacen en el plano de la pared del cilindro.

Ahora cortamos por la mitad un trozo de recipiente cilíndrico de longitud L y representamos el diagrama de cuerpo libre:

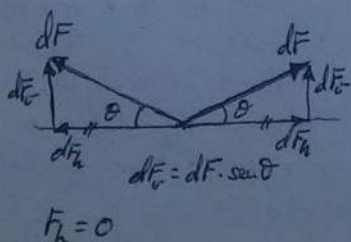


e = espesor de pared

Consideremos un elemento de superficie en la pared interna cuyo radio vector forme un ángulo θ con la horizontal (θ varía entre 0 y π radianes):

$$dS = L \cdot ds \quad \left. \begin{array}{l} \text{arco} = \text{radio} \times \text{ángulo} \Rightarrow ds = r \cdot d\theta \\ \end{array} \right\} dS = L \cdot r \cdot d\theta$$

La fuerza elemental, debida a la presión interna, que actúa sobre este elemento de superficie será: $p = \frac{dF}{dS} \therefore dF = p dS = p L r d\theta$



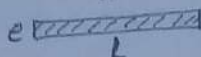
La simetría del problema nos muestra que las componentes horizontales, dF_h , de esta fuerza se anulan dos a dos, mientras que las componentes verticales se suman:

$$F_v = \int_0^\pi dF_v = \int_0^\pi dF \sin \theta = \int_0^\pi p \cdot dS \cdot \sin \theta = \int_0^\pi p \cdot L \cdot r \cdot d\theta \cdot \sin \theta$$

$$\therefore F_v = p L r \int_0^\pi \sin \theta d\theta = p L r (-\cos \theta \Big|_0^\pi) = p L r (-(-1) + 1) = 2 p L r$$

~~Hacemos un balance de fuerzas verticales, aplicando la condición de equilibrio estático~~

(fuerza debida a la tensión circunferencial) = $\sigma_t \cdot \text{superficie} = \sigma_t \cdot e \cdot L$



Hacemos un balance de fuerzas verticales, aplicando la condición de equilibrio estático: $\sum F_{\text{verticales}} = 0 \therefore -2\sigma_t \cdot e \cdot L + F_0 = 0 \therefore$

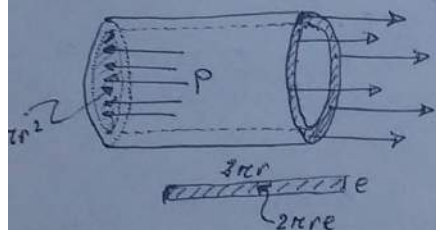
La multiplicamos por 2 porque actúa en los dos bordes del semicilindro y ponemos el signo "-" delante porque va dirigida hacia abajo, según puede verse en las vistas frontal y lateral.

$$\therefore -2\sigma_t \cdot e \cdot L + \frac{P \cdot 2\pi r \cdot L}{e} = 0$$

$$\therefore \sigma_t = \frac{P \cdot r}{e}$$

$P \rightarrow$ presión interna.
 $r \rightarrow$ radio interno del cilindro.
 $e \rightarrow$ espesor de la pared.

Para determinar la tensión longitudinal σ_L consideramos una sección del cilindro normal a su eje y representamos su diagrama de cuerpo libre para luego aplicar la condición de equilibrio estático y efectuar un balance de fuerzas, en este caso horizontales.

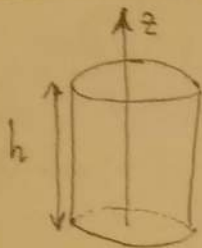


La presión actúa sobre la superficie de una de las tapas, πr^2 , mientras que σ_L actúa en una superficie que vale $2\pi r e$:

$$\sum F_h = 0 \therefore -P \cdot \pi r^2 + \sigma_L \cdot 2\pi r e = 0 \therefore \sigma_L = \frac{P \cdot r}{2e}$$

Por lo tanto, la tensión tangente es doble de la longitudinal, $\sigma_t = 2\sigma_L$, por ello cuando se congela el agua de una tubería cerrada, rompe a lo largo de una línea que corre longitudinalmente.

Ahora podemos atacar el problema que nos traemos entre manos. Puesto que se trata de un depósito cilíndrico colocado verticalmente sobre el suelo y está cargado de líquido, asumimos que su parte superior está abierta (a presión atmosférica, pues en caso contrario habría problemas para descargar su contenido...) y entonces no hay tensión longitudinal $\sigma_L = 0$. No consideraremos la tensión de compresión creciente con la profundidad que aparece en la pared lateral del cilindro debida al propio peso de la chapa y tampoco la tensión de compresión en la base del cilindro debida al peso de la chapa lateral y al peso de la columna de líquido que tiene por encima. Entonce, el problema se reduce a utilizar la expresión deducida de la tensión tangente $\sigma_t = \frac{P \cdot r}{e}$ o ecuación de Laplace, teniendo en cuenta que en nuestro caso particular la presión hidrostática P es variable con la profundidad.

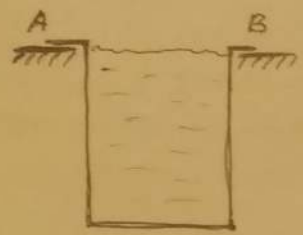


$P = P_{atm} + \rho g(h-z)$. Despreciando la presión atmosférica $\Rightarrow P = \rho g(h-z)$. Y entonces la expresión que nos piden es

$$\sigma_t = \rho \frac{h-z}{e} r g$$

ρ = densidad del líquido.
 e = espesor de la chapa.
 h = altura del depósito.
 r = radio interior del depósito.
 g = aceleración de la gravedad = $9.8 \frac{m}{s^2}$
 z = altura del punto considerado sobre la base del depósito.
 σ_t = tensión que soportan las paredes del depósito.

Si el depósito no estuviera apoyado sobre el suelo sino en A y B como en la figura adjunta:



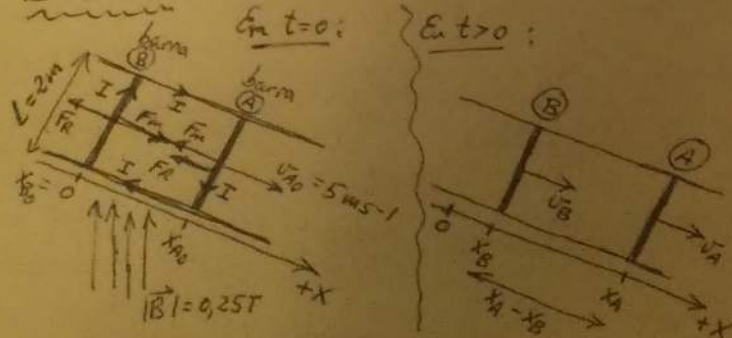
Tendríamos una tensión longitudinal constante, en toda la pared del depósito, igual a:

$$\sigma_L = \frac{\rho g h r^2}{2e} \quad \therefore \quad \sigma_L = \frac{\rho g h r}{2e}$$

peso columna de líquido

PROBLEMA N° 6 Dos riles rectilíneos, paralelos, sobre un plano horizontal, de resistencia despreciable, están separados 2m. Sobre ellos hay dos barras conductoras móviles que forman un rectángulo. Cada barra tiene una masa de 50 kg y una resistencia de 5Ω . Una barra se mueve con una velocidad de 5 m.s^{-1} , alejándose inicialmente de la otra. Calcula la velocidad de la otra barra si todo está sometido a la acción de un campo magnético vertical uniforme de 0.25 T y el coeficiente de rozamiento entre los riles y las barras es $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$. (1,5 puntos)

Solución:



$m = 50 \text{ kg}$
 $R = 5 \Omega / \text{barra}$
 $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$

Al moverse las barras varía el flujo magnético: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos 0^\circ$:

$\Phi = B \cdot L \cdot (x_A - x_B)$. Entonces, por la ley de Faraday-Lenz se induce una f.e.m.: $|\mathcal{E}| = \left| - \frac{d\Phi}{dt} \right| = B \cdot L \cdot \left(\frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_B}{dt} \right) = B \cdot L \cdot (v_A - v_B)$. Utilizamos la ley de Ohm para calcular la intensidad de corriente inducida:

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R_{\text{TOTAL}}} = \frac{|\mathcal{E}|}{2R} = \frac{B \cdot L (v_A - v_B)}{2R}$$

Según la ley de Lenz el sentido de la corriente I sigue las agujas del reloj como indicamos en la figura. Como consecuencia aparece una fuerza de atracción magnética F_m entre ambas barras:

$\vec{F}_m = I \vec{L} \times \vec{B}$. El módulo de la fuerza de Lorentz vale: $F_m = ILB \sin 90^\circ$.

$$\therefore F_m = \frac{B^2 L^2}{2R} (v_A - v_B)$$

En el caso de la barra (B) tiende a acelerarla y va dirigida a la derecha, mientras que en la barra (A) tiende a frenarla y va dirigida a la izquierda. Por otro lado la fuerza de rozamiento en ambas barras va dirigida hacia la izquierda (siempre contraria al movimiento de las barras) $\Rightarrow F_R = \mu N = \mu mg$

Ahora aplicamos la 2ª ley de Newton a cada barra:

$$(A): -F_m - F_R = m a_A \quad \therefore -\frac{B^2 L^2}{2R} (v_A - v_B) - \mu mg = m \frac{dv_A}{dt}$$

$$(B): F_m - F_R = m a_B \quad \therefore \frac{B^2 L^2}{2R} (v_A - v_B) - \mu mg = m \frac{dv_B}{dt}$$

Si restamos miembro a miembro ambas ecuaciones diferenciales obtenemos, (B) - (A):

$$m \frac{dv_B}{dt} - m \frac{dv_A}{dt} = \frac{B^2 L^2}{2R} (v_A - v_B) - \mu mg + \frac{B^2 L^2}{2R} (v_A - v_B) + \mu mg$$

$$\therefore m \frac{d}{dt} (v_B - v_A) = \frac{2B^2 L^2}{2R} (v_A - v_B)$$

Denotamos con $v_R = v_B - v_A$, la velocidad relativa de B respecto de A: $m \frac{dv_R}{dt} = -\frac{B^2 L^2}{R} v_R$

Nos queda una ecuación diferencial que puede integrarse fácilmente separando variables y teniendo en cuenta que cuando $t=0 \Rightarrow v_R = v_B - v_A = -v_{A0}$.

$$m \int_{-v_{A0}}^{v_B - v_A} \frac{dv_R}{v_R} = -\frac{B^2 L^2}{R} \int_0^t dt \quad \therefore m \ln \left[\frac{v_B - v_A}{(-v_{A0})} \right] = -\frac{B^2 L^2}{R} t \quad \therefore \ln \left(\frac{v_A - v_B}{v_{A0}} \right) = -\frac{B^2 L^2}{mR} t$$

$$\therefore \frac{v_A - v_B}{v_{A0}} = e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} \quad \therefore v_B - v_A = v_{A0} \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}$$

Sustituimos la expresión de \vec{v}_B en la 2ª ley de Newton para (A):

$$-\frac{B^2 L^2}{2R} (\vec{v}_A - \vec{v}_A + \vec{v}_{A0} \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}) - \mu m g = m \frac{d\vec{v}_A}{dt}$$

Separamos variables e integramos para obtener \vec{v}_A en función del tiempo:

$$m \int_{\vec{v}_{A0}}^{\vec{v}_A} d\vec{v}_A = -\frac{B^2 L^2 \vec{v}_{A0}}{2R} \int_0^t e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} dt - \mu m g \int_0^t dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{Cambio de variable:} \\ u = -\frac{B^2 L^2}{mR} t \\ du = -\frac{B^2 L^2}{mR} dt \end{array} \right)$$

$$m(\vec{v}_A - \vec{v}_{A0}) = + \frac{B^2 L^2 \vec{v}_{A0}}{2R} \frac{mR}{B^2 L^2} \int_0^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} e^u du - \mu m g t$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A0} \left(1 + \frac{e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}}{2} - \frac{1}{2} \right) - \mu g t \quad ; \quad \vec{v}_A = \frac{\vec{v}_{A0}}{2} \left(1 + e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} \right) - \mu g t$$

Como nos piden la velocidad de la barra (B) utilizamos la expresión ya calculada de $\vec{v}_B = \vec{v}_A - \vec{v}_{A0} \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}$ en la que sustituimos la expresión para \vec{v}_A obtenida:

$$\vec{v}_B = \frac{\vec{v}_{A0}}{2} \left(1 + e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} \right) - \mu g t - \vec{v}_{A0} \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} =$$

$$= \frac{\vec{v}_{A0}}{2} + \frac{\vec{v}_{A0}}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} - \mu g t - \vec{v}_{A0} \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}$$

$$\vec{v}_B = \frac{\vec{v}_{A0}}{2} - \frac{\vec{v}_{A0}}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} - \mu g t = \frac{\vec{v}_{A0}}{2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} \right) - \mu g t$$

Sustituyendo los datos en el S.I queda finalmente:

$$\vec{v}_B = \frac{5}{2} \left(1 - e^{-\frac{0,25^2 \cdot 2^2}{50 \cdot 5} t} \right) - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 9,8 \cdot t$$

$$\vec{v}_B = 2,5 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1000}} \right) - 1,96 \cdot 10^{-4} t$$

$$\vec{v}_B \text{ en m/s ; } t \text{ en s}$$