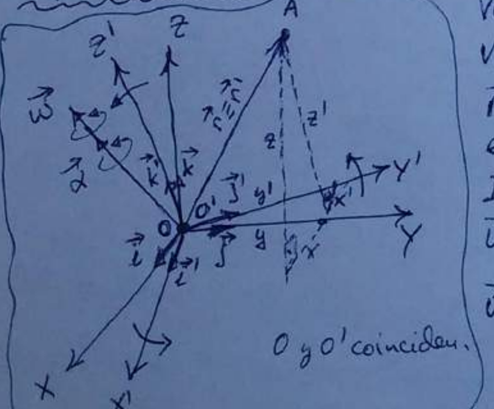
PRÁCTICO ARAGÓN 2015; MODELO A.

PROBLEMA Nº 3 Supongamos una torre de altura h, situada en un punto del Ecuador terrestre. Desde su cima se deja caer un objeto que impacta en el suelo. Calcular el lugar del impacto desde el punto de vista de un observador inercial situado en el exterior de la Tierra. ¿Cómo resuelve el problema un observador situado en la base de la torre? Justificar la discrepancia observada. Considerar g constante en módulo y dirección (1,5 puntos).

Solución: Para empezar vamos a obtener las expresiones de la velocidad y la aceleración de un punto A registradas por dos observadores O y O' que se mueven con velocidad angular relativa $\vec{\omega}$, en el caso general de que $\vec{\omega}$ no sea constante. Consideraremos un primer caso particular en el que los orígenes O y O' de ambos observadores coinciden y un segundo caso general en el que los orígenes de coordenadas de ambos observadores no coinciden.

O y O' coinciden:



Vector de posición medido por O: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

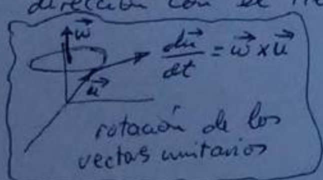
Vector de posición medido por O': $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$

$\vec{r} \equiv \vec{r}' \Rightarrow$ porque los orígenes coinciden (y sus extremos también en A)

Derivamos respecto del tiempo para obtener $\vec{v}, \vec{v}', \vec{a}$ y $\vec{a}'$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + \underbrace{x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}}$$

Respecto de O, los vectores unitarios $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ rotan con $\vec{\omega}$, cambian de dirección con el tiempo y hay que derivarlos respecto de t



Como asumimos $t = t'$ (¡¡Einstein se llevaría las manos a la cabeza!!):

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dx'}{dt'}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt'}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt'}\vec{k}'}_{\vec{v}' = \text{velocidad de A respecto de O'}} + x'(\vec{\omega} \times \vec{i}') + y'(\vec{\omega} \times \vec{j}') + z'(\vec{\omega} \times \vec{k}')$$

Velocidad de A respecto de O

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \underbrace{(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')}_{\vec{r}'} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$. Como $\vec{r} \equiv \vec{r}'$ porque O y O' coinciden $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$ velocidad lineal de O' respecto de O.

Para la aceleración volvemos a derivar respecto de t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

. Analizamos cada uno de los 3 sumandos: $\vec{v}' = v'_{x'}\vec{i}' + v'_{y'}\vec{j}' + v'_{z'}\vec{k}'$ $\therefore$

$$\therefore \frac{d\vec{v}'}{dt} \underset{t=t'}{=} \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \underbrace{\frac{dv'_{x'}}{dt'}\vec{i}' + \frac{dv'_{y'}}{dt'}\vec{j}' + \frac{dv'_{z'}}{dt'}\vec{k}'}_{\vec{a}'} + v'_{x'}\underbrace{\frac{d\vec{i}'}{dt'}}_{=\vec{\omega}\times\vec{i}'} + v'_{y'}\underbrace{\frac{d\vec{j}'}{dt'}}_{=\vec{\omega}\times\vec{j}'} + v'_{z'}\underbrace{\frac{d\vec{k}'}{dt'}}_{=\vec{\omega}\times\vec{k}'} \therefore$$

$$\circledast \therefore \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (v'_{x'}\vec{i}' + v'_{y'}\vec{j}' + v'_{z'}\vec{k}') \therefore \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$\vec{\alpha} \rightarrow$ aceleración angular de O' respecto de O $\Rightarrow \vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ $\therefore$

$$\circledast \therefore \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\circledast\ \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) \therefore \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Sustituyendo los tres términos desarrollados en la ecuación de la aceleración tenemos: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ $\therefore$

$$\therefore \boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}}$$

Donde $\vec{a}$ = aceleración de A respecto de O.

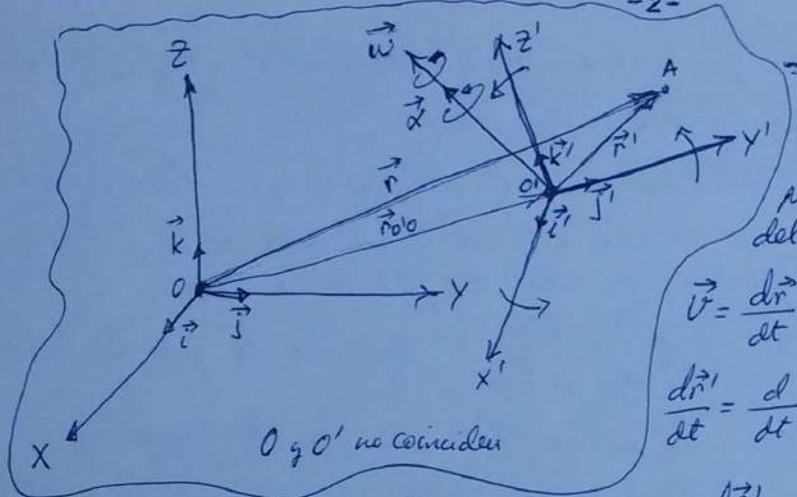
$\vec{a}'$ = aceleración de A respecto de O'.

$2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}_{Cor.}$ = aceleración de Coriolis.

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_N$ = aceleración centrípeta, o normal, de O' respecto de O.

$\vec{\alpha} \times \vec{r} = \vec{a}_T$ = aceleración tangencial del observador O' respecto de O.

- O y O' no coinciden: Cuando los orígenes de coordenadas de ambos observadores no coinciden, el problema se complica algo más pues $\vec{r}$ no coincide con $\vec{r}'$, como podemos comprobar en la siguiente figura:



$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{O'O}$ donde $\vec{r}_{O'O}$ es el vector de posición de O' respecto del observador O.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'O}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'\right)$$

Como hemos comprobado anteriormente: $\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$. En este caso no podemos sustituir $\vec{r}$ por $\vec{r}\,'$ ya que $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$.

Llamaremos $\vec{v}_{O'O}$ a la velocidad de O' respecto de O $\Rightarrow \frac{d\vec{r}_{O'O}}{dt} = \vec{v}_{O'O}$

Entonces la ecuación de velocidades queda con un nuevo término:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}_{O'O}}$$

Para la ecuación de aceleraciones derivamos $\vec{v}$ respecto de t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}_{O'O}\right) = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'O}}{dt}$$

Ya sabemos que:

$$\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' = \vec{\alpha} \times \vec{r}\,'$$

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Llamaremos $\vec{a}_{O'O}$ a la aceleración de O' respecto de O:

$$\vec{a}_{O'O} = \frac{d\vec{v}_{O'O}}{dt}$$

Sustituyendo se llega a la expresión final que contiene un nuevo término $\vec{a}_{O'O}$:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \vec{\alpha} \times \vec{r}\,' + \vec{a}_{O'O}}$$

En ninguna de las dos últimas expresiones podemos intercambiar $\vec{r}$ por $\vec{r}\,'$ ya que en este caso:

$$\vec{r} \neq \vec{r}\,'$$

Para nuestro caso particular del problema nº3, simplificamos las dos últimas expresiones:

$O \rightarrow$ nuestro observador inercial situado en el exterior de la Tierra.

$O' \rightarrow$ observador no inercial situado en el centro de la Tierra y que rota solidario con ella con $\vec{\omega} = cte \Rightarrow \vec{\alpha} = 0$

Asumimos $\vec{r}_{O'O} = cte. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{O'O} = 0 \\ \vec{a}_{O'O} = 0 \end{array} \right\}$ a sabiendas de que la Tierra a parte de rotar sobre su eje ($\simeq$ 1 vuelta cada 24 horas) y demás (precesión, nutación, ..), se mueve alrededor del Sol completando una órbita cada año. Por otro lado, el Sol se mueve alrededor del centro de la Vía Láctea, completando una órbita en torno al centro galáctico en unos 225 millones de años. A su vez la Vía Láctea se mueve en el espacio intergaláctico respecto de otras galaxias, etc, etc. Entonces O no es un estricto observador inercial sino aproximadamente. De todas formas, si alguien conoce a un observador inercial ¡que me lo presente, por favor!.

Sea el punto A situado en la base de la torre de nuestro problema. Llamaremos $\vec{g}_0$ a la aceleración de la gravedad medida por un observador como O que no rota situado en A $\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}_0$.

Despejando $\vec{a}'$ de la última ecuación e introduciendo las simplificaciones expuestas líneas arriba, llegamos a:

$$\vec{a}' = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

(Por simplicidad hacemos coincidir el origen de O y O' en el centro de la Tierra de manera que $\vec{r} \equiv \vec{r}'$)

término de Coriolis $= \vec{a}_{Co} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

aceleración centrífuga: $\vec{a}_c = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

aceleración efectiva de la gravedad $= \vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{a}_c = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

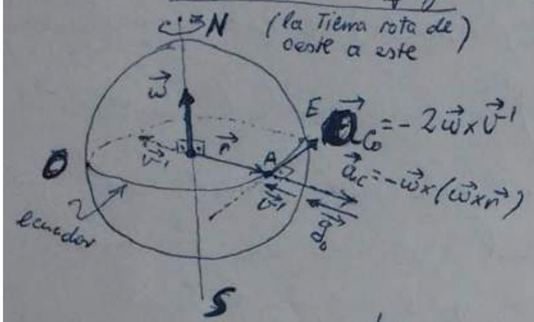
(es la que se mide con un péndulo)

Ahora estamos en condiciones de atacar la jota 3A. Empezamos por la pregunta:

- ¿Cómo resuelve el problema un observador situado en la base de la torre?

Se trata de un observador rotante solidario con la Tierra, entonces está en un sistema no inercial y para resolver el problema debe utilizar los términos de Coriolis y de aceleración centrífuga. Analizamos cada término por separado (no olvidemos que ambas aceleraciones son ficticias y surgen como consecuencia de la no inercialidad del sistema de referencia rotante)

* Aceleración centrífuga: $\vec{a}_c = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$



$|\vec{a}_c| = a_c = \omega^2 r = \omega^2 R$; R = radio terrestre

No produce ninguna desviación del objeto en caída libre (ni en la dirección este-oeste, ni en la dirección norte-sur), porque nos encontramos en el Ecuador terrestre.

Sí disminuye la aceleración g_0 (despreciamos la variación de g_0 con la altura, enunciado $\Rightarrow \vec{g}$ = cte) de la gravedad: $g = g_0 - \omega^2 R$

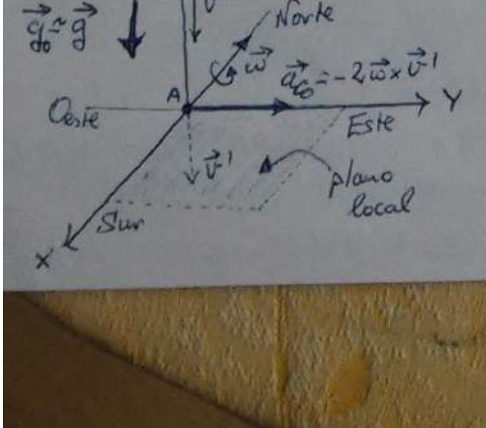
Aunque la aceleración centrífuga es máxima en el ecuador $(a_c = \omega^2 R)$, es muy pequeña comparada con $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24h \cdot 3600 \frac{s}{h}} = 7{,}272 \cdot 10^{-5}\ rad/s \quad ; \quad \frac{\omega^2 R}{g_0} = \frac{(7{,}272 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{9{,}8} = 0{,}0034$$

$R = 6370\ km = 6370000\ m$

Por lo que podemos despreciar este efecto sin incurrir en un grave error.

* Aceleración de Coriolis: $\vec{a}_{Co} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$. Produce una desviación del objeto en caída libre hacia el este como puede verse en la figura líneas arriba. Asumiendo la superficie terrestre plana en las inmediaciones de la torre (plano local):



Por lo tanto en el plano local tenemos la composición de dos movimientos:

- En el eje Z $\Rightarrow$ movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)
- En el eje Y $\Rightarrow$ movimiento rectilíneo con aceleración variable (MRAV)

Suponiendo que el objeto parte del reposo en $t=0$ e $y=0$, desde la posición $z=h$

MRUA en $z \Rightarrow a_z = -g$; $v_z = -gt = v'$; $z = h - \frac{1}{2} g t^2$

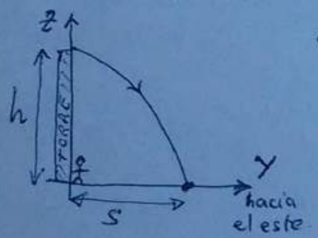
MRAV en $Y \Rightarrow a_y = |-2\vec{\omega} \times \vec{v}'| = 2\omega |\vec{v_z}| \operatorname{sen} 90° = 2\omega g t$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \therefore v_y = \int_0^t a_y \, dt = 2\omega g \int_0^t t \, dt = \omega g t^2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \therefore y = \int_0^t v_y \, dt = \omega g \int_0^t t^2 \, dt = \frac{1}{3} \omega g t^3$$

Tiempo de vuelo del objeto $\Rightarrow z=0$ (impacto) $\Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2} g t_{vuelo}^2 \therefore$

$\therefore g t_{vuelo}^2 = 2h \therefore t_{vuelo} = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}$ Sustituyendo t_{vuelo} en obtenemos la desviación, s, hacia el este con respecto al observador no inercial parado en la base de la torre. Entonces $y = s$ cuando $t = t_{vuelo}$

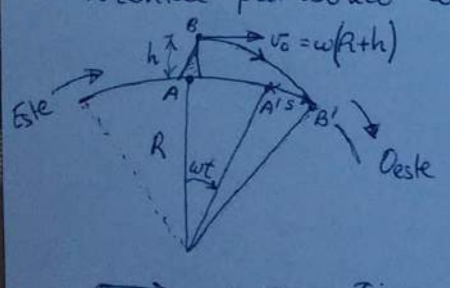


$$s = y(t = t_{vuelo}) = \frac{1}{3} \omega g t_{vuelo}^3 = \frac{1}{3} \omega g \left[\left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}\right]^3$$

$$\boxed{s = \frac{1}{3} \omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = \frac{1}{3} \omega \sqrt{\frac{8h^3}{g}}}$$

hacia el este

- Analizamos ahora el punto de vista de un observador inercial situado en el exterior de la Tierra: El enunciado nos dice que $\vec{g} = cte. \Rightarrow$ lo que ve este observador inercial es un tiro horizontal parabólico con velocidad inicial del objeto: $v_0 = \omega(R+h)$.



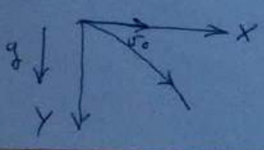
Composición de dos movimientos:

* Horizontal: MRU, movimiento rectilíneo y uniforme

$v_x = v_0 = \omega(R+h)$; $x = v_x t = \omega(R+h) t$

* Caída libre (vertical hacia abajo):

$v_y = gt$; $y = \frac{1}{2} g t^2$



Tiempo de vuelo (Como antes, suponemos AB' recto, no curvo)

$t = t_{vuelo}$ cuando $y = h$ (impacto) $\Rightarrow h = \frac{1}{2} g t_{vuelo}^2 \therefore$

$\therefore t_{vuelo} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$ alcance $= \overline{AB'} = \omega(R+h) t_{vuelo} = \omega(R+h)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Mientras el objeto vuela hasta impactar con la superficie terrestre en B', la base de la torre A se mueve hasta A' debido a la rotación de la Tierra, es decir, se mueve un ángulo ωt:

arco = ángulo · radio $\simeq \overline{AA'} = \omega t R$ (segmento recto)
Suponemos Tierra plana en las inmediaciones de la torre

Entonces la desviación hacia el este que mide el observador inercial será: $s = \overline{AB'} - \overline{AA'}$ ∴

$$\therefore\ s = \omega (R+h)\sqrt{\frac{2h}{g}} - \omega R\, t_{vuelo} = \omega(\cancel{R}+h)\sqrt{\frac{2h}{g}} - \cancel{\omega R\sqrt{\frac{2h}{g}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s = \omega\sqrt{\frac{2h^3}{g}}}$$

hacia el este

- Justificar la discrepancia observada: hay una discrepancia clara en las fórmulas que utilizan ambos observadores, el inercial y el no inercial. Sin embargo ambos utilizan las mismas aproximaciones:
  1. El objeto cae en el vacío, no hay fricción con el aire.
  2. Tierra plana en las inmediaciones de la torre (plano local donde se produce el impacto del objeto).
  3. El módulo de $\vec{g}$ es constante y no varía con la altura sobre la superficie terrestre $\Rightarrow |\vec{g}| = cte \simeq g_0 = 9,8\ m/s^2$
  4. La dirección de $\vec{g}$ es invariante durante la caída del objeto.

El quid de la cuestión estriba en la aproximación nº4 que para el observador no inercial situado en la base de la torre, realmente no es tal aproximación ya que para él $\vec{g}$ siempre apunta hacia abajo, hacia el centro de la Tierra, mientras el objeto cae. Cuando el observador no inercial escribe $a_z = -g$ no está realizando ninguna aproximación sino describiendo la realidad.

Pero en el caso del observador inercial situado en el exterior de la Tierra la dirección de $\vec{g}$ no es invariante. A medida que cae el objeto $\vec{g}$ debería ir modificando su dirección, apuntando siempre al centro terrestre, tendríamos un sistema de vectores concurrentes cuyas líneas de aplicación se cortan en el centro de la Tierra. Sin embargo el observador inercial supone un sistema de vectores $\vec{g}$ paralelos entre sí y normales a la superficie terrestre supuesta plana. Es decir, la trayectoria real no es una parábola sino una elipse que interseca la circunferencia ecuatorial.

Por lo tanto hemos de elegir como mejor fórmula para el cálculo de la desviación hacia el este de un cuerpo que cae la del observador no inercial: $S_{NI} = \frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$

y hemos de tener en cuenta que la fórmula del observador inercial: $S_I = \omega\sqrt{\frac{2h^3}{g}}$ tiene un error de un 50% respecto de la S_{NI}:

$$\%\ \text{error relativo} = \frac{S_I - S_{NI}}{S_{NI}} \cdot 100 = \frac{\cancel{\omega}\sqrt{\frac{2h^3}{\cancel{g}}} - \frac{1}{3}\cancel{\omega}\sqrt{\frac{8h^3}{\cancel{g}}}}{\frac{1}{3}\cancel{\omega}\sqrt{\frac{8h^3}{\cancel{g}}}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{2h^3} - \frac{2}{3}\sqrt{2h^3}}{\frac{2}{3}\sqrt{2h^3}} \cdot 100 =$$

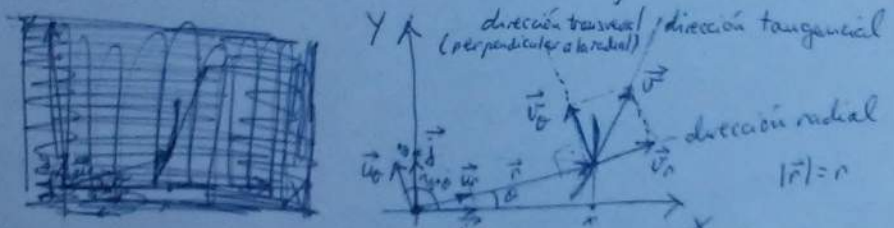
$$= \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} \cdot 100 \quad \therefore \quad \underline{\%\ \text{error relativo} = 50\%}$$

Existen modelos más elaborados que no tienen en cuenta las aproximaciones $\underline{2}$, $\underline{3}$ y $\underline{4}$ y donde suponen fuerza de atracción, entre el cuerpo y la Tierra, central y conservativa por lo que el cuerpo cae describiendo una elipse para el observador inercial. Entonces se trata de determinar la ecuación de dicha trayectoria elíptica y su intersección con la superficie terrestre. El cálculo es bastante más laborioso que $S_{NI} = \frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$. Además nuestra aproximación S_{NI} difiere de estos cálculos más exactos en menos de un 5% cuando la altura de la torre: $h \leq 10\,km$.

Podemos poner de acuerdo al observador inercial con el no inercial siguiendo un razonamiento basado en dos ideas:

* La fuerza de atracción es central por lo que el momento cinético o angular, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$, se mantiene constante.
* La altura h de la torre es muy pequeña comparada con el radio R del planeta.

Bajo estas premisas analizamos la desviación hacia el este en el Ecuador, respecto de un sistema de referencia fijo inercial. Al ser la fuerza de atracción central y conservativa, la trayectoria del objeto será elíptica con el centro, C, de la Tierra en un foco de la elipse (aunque esta información es irrelevante para el desarrollo de nuestro razonamiento). Vamos a utilizar la velocidad $\vec{v}$ del objeto en coordenadas polares:



$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$\vec{r} = |\vec{r}|\vec{u}_r$; $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|\vec{r}|\vec{u}_r\right) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\,\theta\,\vec{j} \therefore \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \underbrace{\left(-\text{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right)}_{\vec{u}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$

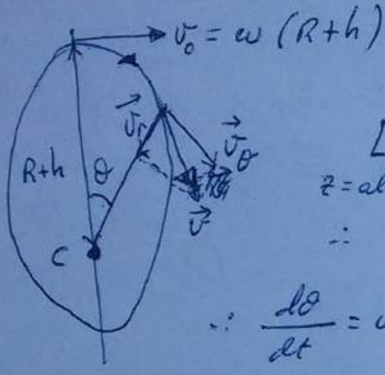
$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\,\theta$, $\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$. El momento angular se puede expresar como: $\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,\vec{r} \times \left(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta\right) = m\vec{r} \times \vec{v}_r + m\vec{r} \times \vec{v}_\theta$

$|\vec{L}| = m\,r\,v_r \underbrace{\text{sen}\,0^\circ}_{0} + m\,r\,v_\theta \underbrace{\text{sen}\,90^\circ}_{1} \therefore L = m\,r\,v_\theta = m\,r^2\frac{d\theta}{dt}$

Aplicando el principio de conservación del momento angular:



$$L_0 = m(R+h)v_0 = m(R+h)^2\omega \quad \therefore$$

$$L = mrv = mrv_\theta = mr^2\frac{d\theta}{dt} = m(R+z)^2\frac{d\theta}{dt}$$

z = altura sobre la superficie del planeta en t ∴ $r = R+z$

$$\therefore \; L_0 = L \; \therefore \; \cancel{m}(R+h)^2\omega = \cancel{m}(R+z)^2\frac{d\theta}{dt} \; \therefore$$

$$\therefore \; \frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{(R+h)^2}{(R+z)^2} = \omega\frac{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}{\left(1+\frac{z}{R}\right)^2}$$

Utilizamos las siguientes relaciones aproximadas:

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^2 \simeq 1+\frac{2h}{R} \; ; \; \left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2} \simeq 1-\frac{2z}{R}$$

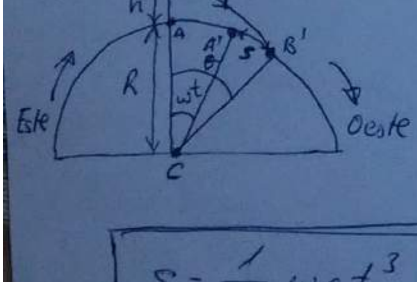
$$\therefore \; \frac{d\theta}{dt} \simeq \omega\left(1+\frac{2h}{R}\right)\left(1-\frac{2z}{R}\right) = \omega\left[1+\frac{2(h-z)}{R} - \underbrace{\frac{4hz}{R^2}}_{\text{despreciable} \simeq 0}\right] \; \therefore$$

$$\therefore \; \frac{d\theta}{dt} \simeq \omega\left[1+\frac{2(h-z)}{R}\right]$$

Para integrar esta ecuación necesitamos la función $z = z(t) \Rightarrow z = h - \frac{1}{2}gt^2$ donde g es la aceleración de la gravedad que suponemos constante en módulo y dirigida hacia el centro C terrestre:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\left[1+\frac{\cancel{2}(\cancel{h}-\cancel{h}+\frac{1}{\cancel{2}}gt^2)}{R}\right] = \omega + \frac{\omega g}{R}t^2$$

$$\int_0^\theta d\theta = \omega\int_0^t dt + \frac{\omega g}{R}\int_0^t t^2 dt \; \therefore \; \theta = \omega t + \frac{\omega g}{3R}t^3$$



$$\text{ángulo } A'CB' = \widehat{A'CB'} = \theta - \omega t = \frac{1}{3}\frac{\omega g}{R}t^3$$

arco $A'B' = s$ = ángulo × radio

$$s = \frac{1}{3}\frac{\omega g}{\cancel{R}}t^3 \cdot \cancel{R}$$

$$\boxed{s = \frac{1}{3}\omega g t^3}$$

Luego razonando así nuestro observador inercial se pone de acuerdo con el no inercial.