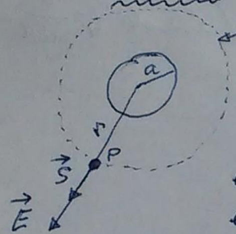
PRÁCTICO RIOJA 2015.

(3) Solución: Sea una esfera de radio a, con una carga total Q uniformemente distribuida por todo su volumen $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. Para que tal circunstancia se dé, la esfera tiene que ser de un material dieléctrico. En estas condiciones su densidad volumétrica de carga valdrá:
$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$. Aplicando el Teorema de Gauss vamos a calcular el campo eléctrico, $|\vec{E}| = E$, en el exterior $(r \geq a)$ y en el interior de la esfera $(r \leq a)$.

- Exterior: $r \geq a$



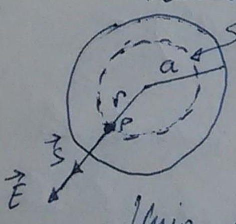
superficie gaussiana esférica: $S = 4\pi r^2$

flujo eléctrico $= \Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos 0^\circ = E 4\pi r^2$

Th. Gauss: $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon}$, ε = permitividad dieléctrica.

Igualando: $E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$ $\therefore$ $E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$ $\Rightarrow$ luego exteriormente el campo es el mismo que si la esfera fuera conductora.

- Interior: $r \leq a$



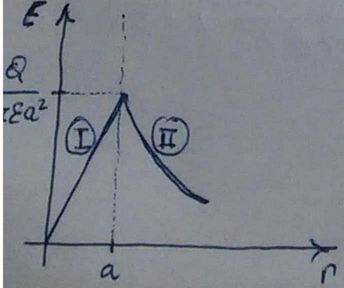
superficie gaussiana esférica: $S = 4\pi r^2$ en cuyo interior habrá una carga q. distribución continua y uniforme de carga $\Rightarrow \rho = cte$

$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$ $\therefore$ $q = Q\frac{r^3}{a^3} = Q\left(\frac{r}{a}\right)^3$

flujo eléctrico $= \Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos 0^\circ = E 4\pi r^2$

Th. Gauss: $\Phi = \frac{q}{\varepsilon} = \frac{Q r^3}{\varepsilon a^3}$. Igualando: $E 4\pi r^2 = \frac{Q r^3}{\varepsilon a^3}$ $\therefore$

$\therefore$ $E_{int} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Qr}{a^3}$. O sea, que el campo crece linealmente con r en el interior de la esfera, desde el centro ($E = 0$ para $r = 0$) hasta la superficie ($r = a$), en la que vale $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qa}{a^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a^2}$ estableciéndose con ello la continuidad con el campo exterior.



$$E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon a^3}, & r \leq a \quad \text{I} \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}, & r \geq a \quad \text{II} \end{cases}$$

Ahora calculamos el potencial eléctrico en el interior y en el exterior de la esfera teniendo en cuenta que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V = -\vec{\nabla}V$. Viendo la simetría esférica del problema y trabajando en polares llegamos a $E = -\frac{\partial V}{\partial r}$, expresión que hemos de integrar:

- Exterior: $r \geq a$. Asignando potencial nulo a $r \to \infty$:

$$-\int_V^0 dV = \int_r^\infty E_{ext}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\Big|_r^\infty\right] \therefore$$

$$\therefore V - 0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \cancel{\frac{1}{\infty}}^{\,0}\right) \therefore V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

. En la superficie de la esfera, $r = a \Rightarrow V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a}$. La primera derivada de V sale negativa y la segunda da positiva $\left\{\begin{array}{l}\frac{dV}{dr} < 0 \Rightarrow \text{curva decreciente} \\ \frac{d^2V}{dr^2} > 0 \Rightarrow \text{curva cóncava}\end{array}\right\} \Rightarrow$ (

- Interior: $r \leq a$. Integramos entre r y $r = a$ (donde $V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a}$ para que haya continuidad):

$$-\int_V^{V_a} dV = \int_r^a E_{int}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a^3}\int_r^a r\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a^3}\,\frac{r^2}{2}\Big|_r^a \therefore$$

$$\therefore -\int_V^{V_a} dV = V - V_a = V - \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a^3}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) \therefore$$

$$\therefore V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a^3}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a^3}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2} + a^2\right) =$$

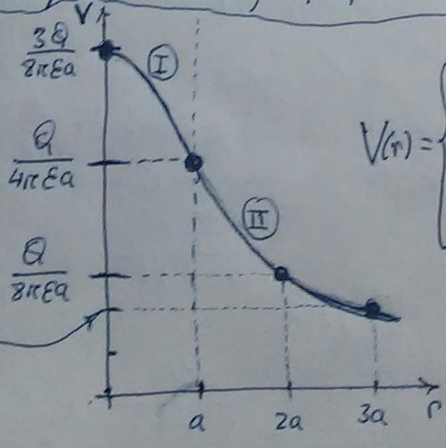
multiplicamos y dividimos por a^2

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon a^3}\cdot\frac{a^2 - r^2 + 2a^2}{2} \therefore V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon a^3}(3a^2 - r^2)$$

. En el centro de la esfera, $r = 0 \Rightarrow V_0 = \frac{Q\,3a^2}{8\pi\varepsilon a^3} \therefore V_0 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon a}$. La primera derivada de V da negativa y la segunda también $\left\{\begin{array}{l} dV/dr < 0 \Rightarrow \text{curva decreciente} \\ d^2V/dr^2 < 0 \Rightarrow \text{curva convexa}\end{array}\right\} \Rightarrow$)

Con estos datos podemos dibujar perfectamente la gráfica que nos piden

r	V
0	$\frac{3Q}{8\pi\varepsilon a}$
a	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon a} = \frac{2Q}{8\pi\varepsilon a}$
$2a$	$\frac{Q}{8\pi\varepsilon a}$
$3a$	$\frac{Q}{12\pi\varepsilon a} = \frac{2}{3}\frac{Q}{8\pi\varepsilon a}$



$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\varepsilon a^3}(3a^2 - r^2), & r \leq a \quad \text{I} \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}, & r \geq a \quad \text{II} \end{cases}$$

Práctico Rioja 2015

4 Solución:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = 2L \\ T_1 = 320K \\ P_1 = 2atm \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{adiabática}]{\text{expansión}} \left\{\begin{array}{l} V_2 \\ T_2 = \frac{T_1}{4} = \frac{320K}{4} ;\ T_2 = 80K \\ P_2 \end{array}\right. ;\ \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

Utilizamos la ecuación de las adiabáticas $PV^\gamma = constante$ combinada con la ecuación de los gases perfectos $PV = nRT$:

* $V = \frac{nRT}{P}$. Sustituyendo V en la ecuación de las adiabáticas:

$$P\left(\frac{nRT}{P}\right)^\gamma = constante \quad \therefore \quad P\left(cte\,\frac{T^\gamma}{P^\gamma}\right) = constante \quad \therefore$$

(constante)

$$\therefore \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = constante \quad \therefore \quad \frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = constante \quad \therefore \quad \frac{T_1}{P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{T_2}{P_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad \therefore$$

$$\therefore \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_2}{T_1} \quad \therefore \quad P_2 = P_1\cdot\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_1\cdot\left(\frac{T_1/4}{T_1}\right)^{\gamma/\gamma-1} \quad \therefore$$

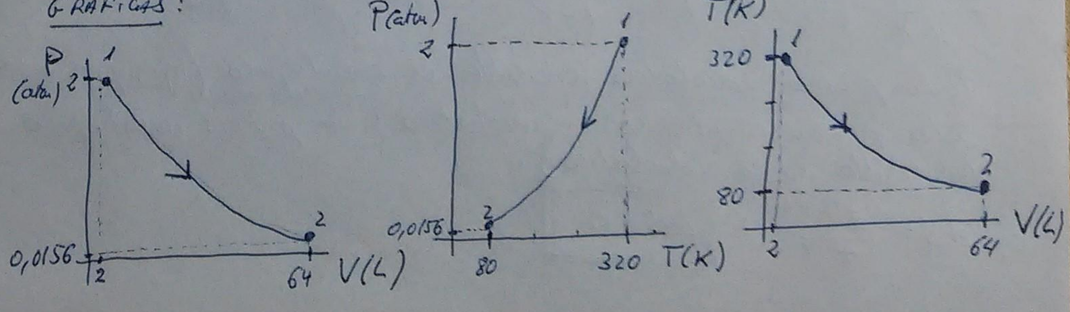
$$\therefore P_2 = \frac{P_1}{4^{\gamma/\gamma-1}} = \frac{2\,atm}{4^{1{,}4/0{,}4}} \quad \therefore \quad \boxed{P_2 = 0{,}0156\ atm}$$

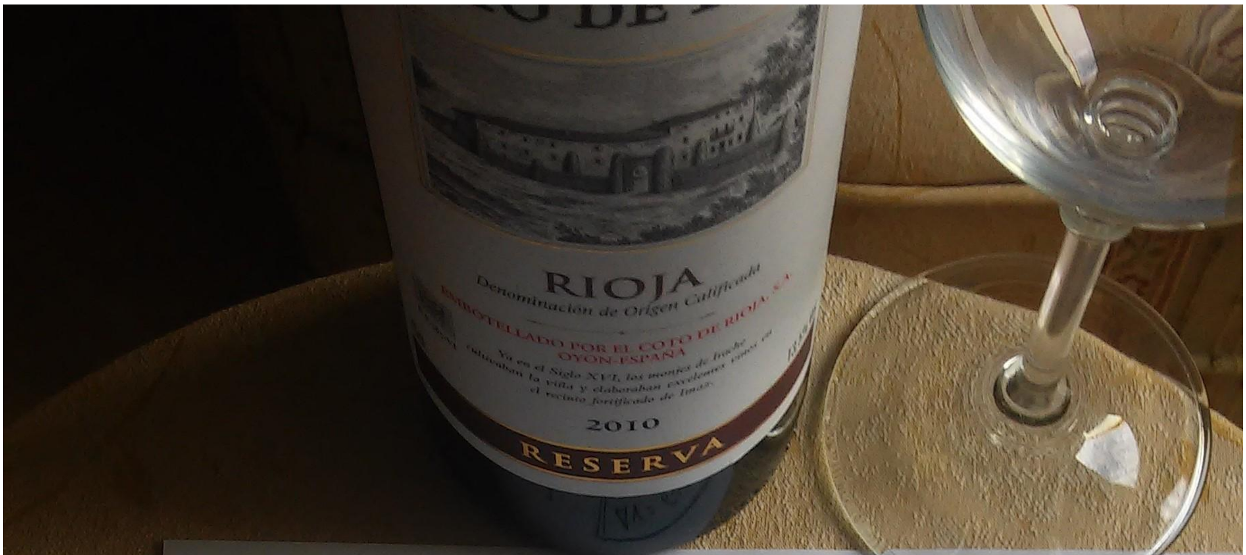
* $P = \frac{nRT}{V} = cte\cdot\frac{T}{V}$. Sustituyendo p en la ecuación de las adiabáticas: $cte\cdot\frac{T}{V}\cdot V^\gamma = constante \quad \therefore \quad T\cdot V^{\gamma-1} = constante \quad \therefore$

$$\therefore V\cdot T^{1/\gamma-1} = constante \quad \therefore \quad V_1 T_1^{1/\gamma-1} = V_2 T_2^{1/\gamma-1} \quad \therefore \quad V_2 = V_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/\gamma-1} \quad \therefore$$

$$\therefore V_2 = V_1\left(\frac{T_1}{\frac{1}{4}T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_1\cdot 4^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2L\cdot 4^{\frac{1}{0{,}4}} \quad \therefore \quad \boxed{V_2 = 64L}$$

Gráficas:





$\Delta V = V_2 - V_1 = 64 - 2 \quad \therefore \quad \boxed{\Delta V = 62 L}$

Para calcular el trabajo W_{12} utilizamos el primer principio de la Termodinámica: $dU = \cancel{dQ} - dW$ 0 (adiabático) $\quad dW = -dU = -n c_v dT$

$$W_{12} = -n c_v \int_{T_1}^{T_2} dT = -n c_v (T_2 - T_1) = n c_v (T_1 - T_2)$$

Relación de Mayer: $c_p - c_v = R$, dividiendo entre c_v:

$$\frac{c_p}{c_v} - 1 = \frac{R}{c_v} \quad \therefore \quad \gamma - 1 = \frac{R}{c_v} \ ; \ c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

exponente adiabático $= \gamma = \frac{c_p}{c_v}$ $\qquad$ Gases perfectos $\begin{cases} nR = \frac{P_1 V_1}{T_1} \\ nR = \frac{P_2 V_2}{T_2} \end{cases}$ $\quad \therefore$

$$\therefore \quad W_{12} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) = \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1}$$

$$W_{12} = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$W_{12} = \frac{2\,atm \cdot 2\,L \cdot 101325\,Pa/atm \cdot 10^{-3}\,m^3/L}{1,4 - 1}\left(1 - \frac{80\,K}{320\,K}\right)$$

$$\boxed{W_{12} = 760\,J}$$

También podemos calcularlo a lo bestia: $dW = p_{ex} dV \overset{\text{suponemos transformación reversible}}{=} p\,dV$

$$pV^\gamma = cte = P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \ ; \ p = P_1 V_1^\gamma \cdot \frac{1}{V^\gamma} = P_2 V_2^\gamma \cdot \frac{1}{V^\gamma}$$

$$\therefore \quad W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = P_2 V_2^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_1 V_1^\gamma}{1 - \gamma}\left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right) =$$

$$= \frac{P_2 V_2^\gamma}{1 - \gamma}\left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - \gamma} = \frac{nRT_2 - nRT_1}{1 - \gamma} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) =$$

Todo proceso adiabático reversible es isoentrópico (ojo, porque n[o] todo proceso isoentrópico es adiabático; un proceso isoentrópico irreversible no es adiabático).

$$dS = \frac{\cancel{dQ}^{\,0}}{T} \quad \therefore \quad \boxed{\Delta S = 0}$$