Práctico Aragón 2015. Modelo A

Problema nº 1

En el experimento de Millikan una gota de aceite tiene una carga de 10^{-16}C y se sitúa entre las placas de un condensador plano. Entre ellas se establece una diferencia de potencial que produce un campo uniforme dando lugar a una fuerza que actúa sobre la gota verticalmente. El campo puede cambiar de sentido invirtiendo la diferencia de potencial. Cuando la fuerza es descendente, la gota baja con una velocidad ($v_1 = 0{,}22\ mm \cdot s^{-1}$) y cuando es ascendente sube con una velocidad ($v_2 = 0{,}13\ mm \cdot s^{-1}$). La distancia entre placas es de 1 cm. Calcula la diferencia de potencial aplicada entre las placas del condensador.

Datos: $d(\text{aceite}) = 0{,}92\ g \cdot cm^{-3}$; $d(\text{aire}) = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ g\ cm^{-3}$;
$\mu(\text{viscosidad aire}) = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ Pa \cdot s$; $g = 10\ m \cdot s^{-2}$

Solución: Una gota de aceite con carga eléctrica positiva $q = 10^{-16}$C que se mueve entre las placas de un condensador plano está sometida a cuatro fuerzas:

* Rozamiento (Ley de Stokes): $F_R = 6\pi r \eta v$; r = radio de la gota ; $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \frac{kg}{m \cdot s}$ y v = velocidad de la gota. Es una fuerza que siempre se opone al movimiento de la gota y es directamente proporcional al movimiento de la misma.

* Empuje (Principio de Arquímedes): $F_{emp} = \left(\begin{array}{l}\text{peso del volumen de}\\ \text{fluido (aire) desalojado}\\ \text{por la gota.}\end{array}\right) \therefore$

$$\therefore F_{emp} = m_{aire} \cdot g = d_{aire} \cdot V_{gota} \cdot g = d_{aire} \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$d_{aire} = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \frac{\cancel{g}}{\cancel{cm^3}} \cdot \frac{10^{-3}\ kg/\cancel{g}}{10^{-6}\ m^3/\cancel{cm^3}} = 1{,}3\ \frac{kg}{m^3} ;\ d_{aceite} = 0{,}92\ g/cm^3 \times 1000 = 920\ \frac{kg}{m^3}$$

$V_{gota}(\text{esfera}) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Esta fuerza siempre es vertical y hacia arriba.

* Fuerza debida al campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$, creado entre las placas del condensador:

V = tensión entre las placas
l = distancia entre placas = 1 cm = 0,01 m

$$W_{eléctrico} = q(V_{ánodo} - V_{cátodo}) = q \cdot V$$

$$W_{eléctrico} = \int_{ánodo}^{cátodo} \vec{F}_{elec} \cdot d\vec{r} = F_{elec} \int_{ánodo}^{cátodo} dr = q \cdot E \cdot l$$

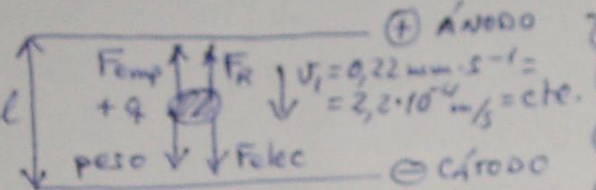
$$q \cdot V = q E l \therefore E = \frac{V}{l} \therefore F_{elec} = q E = \frac{qV}{l}$$

En nuestro caso de gota con carga positiva, la Felec siempre tiene sentido hacia la placa negativa (cátodo) del condensador.

⊕ Peso, $\vec{mg}$, de la gota: $mg = d_{aceite} V_{gota} g = d_{aceite} \frac{4}{3}\pi r^3 g$

Es siempre vertical y hacia abajo.

Como la fuerza de fricción es directamente proporcional a la velocidad de la gota, a medida que ésta se va moviendo más rápido también va creciendo F_R y llega un momento en que las fuerzas de tracción que tiran de la gota en el sentido de su movimiento se igualan a las fuerzas resistentes que frenan dicho movimiento, entonces $\sum F$ = tracción − resistentes = 0 y por la 2ª ley de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = 0$, a partir de este momento no hay aceleración y la gota se mueve con una velocidad límite constante (MRU), en nuestro caso v_1 y v_2:

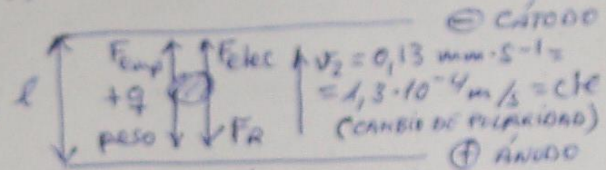


Balance de fuerzas verticales:

$F_{emp} + F_R = peso + F_{elec}$

$d_{aire}\cdot V_{gota}\cdot g + 6\pi r\eta v_1 = d_{aceite}\cdot V_{gota}\cdot g + \frac{qV}{l}$

$$\boxed{6\pi r\eta v_1 = (d_{aceite} - d_{aire}) V_{gota}\, g + \frac{qV}{l}}$$



Balance de fuerzas verticales:

$F_{emp} + F_{elec} = F_R + peso$

$d_{aire}\cdot V_{gota}\cdot g + \frac{qV}{l} = 6\pi r\eta v_2 + d_{aceite} V_{gota}\cdot g$

$$\boxed{6\pi r\eta v_2 = (d_{aire} - d_{aceite}) V_{gota}\, g + \frac{qV}{l}}$$

Restamos miembro a miembro la última ecuación de la derecha y la última ecuación de la izquierda: $\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{\pi}\, \cancel{r}\,\eta(v_1 - v_2) = \cancel{2}(d_{aceite} - d_{aire})\frac{4}{3}\cancel{\pi}\, r^{\cancel{3}\,2} g$ ∴

$$r^2 = \frac{9\eta(v_1 - v_2)}{4(d_{aceite} - d_{aire})g} \quad ; \quad r_{gota} = \sqrt{\frac{9\eta(v_1 - v_2)}{4(d_{aceite} - d_{aire})g}}$$

Despejando la diferencia de potencial entre las placas en la ecuación de la derecha recuadrada, por ejemplo:

$$V = \frac{l}{q}\left[6\pi r\eta v_2 - (d_{aire} - d_{aceite})\frac{4}{3}\pi r^3 g\right]$$. Sustituyendo r:

$$V = \frac{2\pi r l}{q}\left[3\eta v_2 + (\cancel{d_{aceite} - d_{aire}})\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\underbrace{\frac{\cancel{3}\cdot 3\eta(v_1 - v_2)}{\cancel{2}\cdot 2(\cancel{d_{aceite} - d_{aire}})\cancel{g}}}_{r^2}\cdot \cancel{g}\right] =$$

$$= \frac{6\pi r l\eta}{q}\cdot\left(v_2 + \frac{v_1 - v_2}{2}\right) = \frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot\pi r l\eta}{q}\cdot\frac{v_1 + v_2}{\cancel{2}}$$. Volvemos a sustituir r

y llegamos a $V = \frac{3\pi l\eta}{q}\sqrt{\frac{9\eta(v_1 - v_2)}{4(d_{aceite} - d_{aire})g}} = \frac{3\pi l}{q}(v_1 + v_2)\sqrt{\frac{9\eta^3(v_1 - v_2)}{4(d_{aceite} - d_{aire})g}}$

$$V = \frac{3\pi\cdot 0{,}01}{10^{-16}}(2{,}2\cdot 10^{-4} + 1{,}3\cdot 10^{-4})\sqrt{\frac{9\cdot(1{,}8\cdot 10^{-5})^3\cdot(2{,}2 - 1{,}3)\cdot 10^{-4}}{4(920 - 1{,}3)\cdot 10}} \; ; \; \boxed{V = 3{,}74\,V}$$