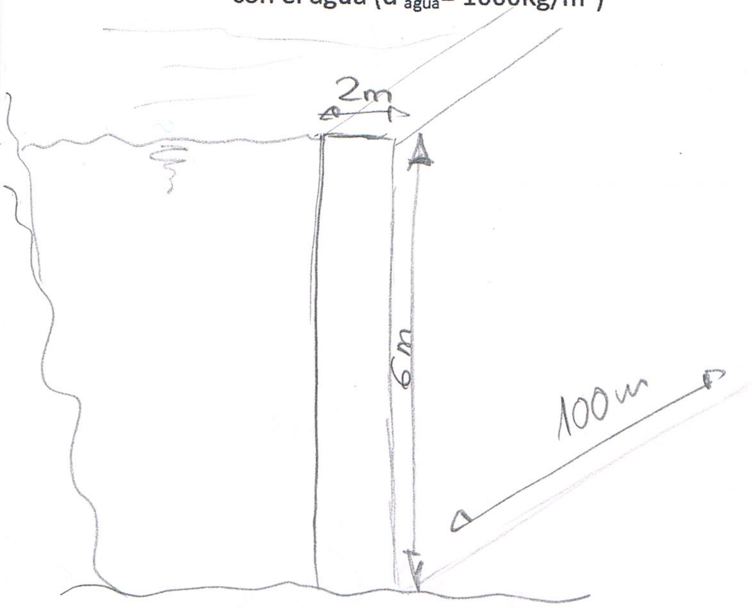
EXAMEN PROBLEMAS OPOSICIÓN CYL 2015

1.- Una presa, con forma de paralelepípedo, cuyas dimensiones son 100m de base, 6 m de altura y 2 m de grosor, contiene agua hasta el borde superior.

a) Deduzca la expresión de la fuerza total o equivalente sobre la pared de la presa y determine su valor con las dimensiones de la misma.

b) Obtenga la profundidad a la que está aplicada esta fuerza (centro de presión)

c) Calcula la densidad mínima del material de la presa para que al llegar el agua a la parte superior de la misma no vuelque en torno al borde inferior de la cara que no está en contacto con el agua ($d_{agua} = 1000 Kg/m^3$)



a) Tenemos un paralelepípedo en el cual va a aparecer una presión hidrostática debida al fluido contenido (agua). Por el principio de Pascal, esta presión se ejerce en todas direcciones (p es escalar).

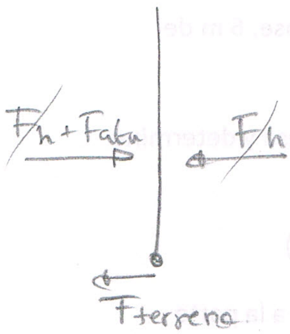
Debido a esta presión, tendremos una fuerza hidrostática:

$$p = \frac{d\vec{F}}{d\vec{s}} \longrightarrow \boxed{d\vec{F} = p\, d\vec{s}}$$

La presión hidrostática tiene por valor:

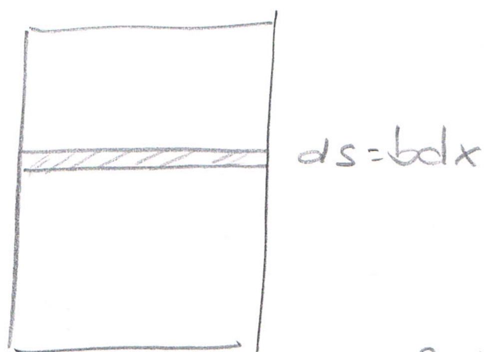
$$\boxed{P_h = \rho \cdot g \cdot x} \quad \text{con } x = \text{profundidad.}$$

Sobre la pared de la presa se ejerce la fuerza $F_h + F_{atm}$ pero el neto es F_h al tener también F_{atm} del lado de fuera.



Al variar la fuerza (y la presión) con la profundidad, la fuerza total que debe soportar la presa será:

$$dF_h = p\, d\vec{S} \Rightarrow \boxed{F_h = \int_0^h (\rho g x)\, dS}$$



$$F_h = \int_0^h (\rho g x b)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho g b \int_0^h x\, dx \Rightarrow \rho g b \left.\frac{x^2}{2}\right)_0^h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho g b h^2}{2} = F_h}$$

Expresión ésta que puede relacionarse con la posición del centro de masas de la sección de la presa:

$$F_h = \rho g \int_S x\, dS \Rightarrow \text{y siendo } x_G = \frac{\int x\, dS}{S} \Rightarrow$$

$$\boxed{F_h = \rho g S x_G}$$

Obviamente, ambas expresiones son equivalentes:

$$\rho g S x_G = \rho g (b h) \frac{h}{2} = \frac{\rho g b h^2}{2} \quad \text{con } x_G = \frac{h}{2} \text{ para sección rectangular.}$$

Sustituyendo valores:

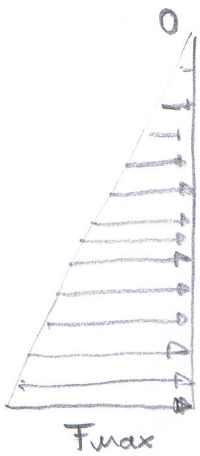
$$\boxed{F_T} = \frac{1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9'8 \frac{m}{s^2} \cdot 100\, m \cdot (6)^2 m^2}{2} = \boxed{1'764 \times 10^7 \, N}$$

b) El punto de aplicación de esta fuerza se encuentra en el centro de presiones.

Para hallarlo, existen 2 procedimientos:

1º → Más sencillo:

Tenemos una distribución de fuerza triangular:

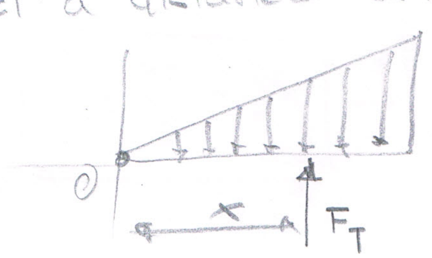


En estos casos, el punto de fuerza equivalente se encuentra a la altura del baricentro del triángulo de fuerzas, esto es, $\frac{2}{3}h$

Para nuestro problema, $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4\, m$ de profundidad

Demostración:

Toda la distribución de fuerzas puede ser compensada por una fuerza puntual a distancia arbitraria x



La distribución lineal de fuerza tiene por expresión:

$$d\vec{F} = Ax + B$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \rightarrow F=0 \\ x=h \rightarrow F=F_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = 0 + B \Rightarrow \boxed{B=0} \\ F_{max} = A \cdot h \rightarrow \boxed{A = \dfrac{F_{max}}{h}} \end{array}$$

así $$\boxed{d\vec{F} = \frac{F_{max}}{h} \cdot x}$$

Tomando momentos respecto del punto O.

$$\boxed{\int d\vec{F} \cdot x = F_T \cdot x_G}$$

F_T se calcula fácilmente como: $\displaystyle\int_0^h \frac{F_{max}}{h} x \, dx = \frac{F_{max}}{h} \frac{x^2}{2}\Big)_0^h$

$$\boxed{F_T = \frac{F_{max} \cdot h}{2}}$$

Sigamos con los momentos:

$$\int_0^h \left(\frac{F_{max}}{h} \cdot x\right) \cdot x \, dx = \frac{F_{max} \cdot h}{2} \cdot x_G$$

$$\frac{F_{max}}{h} \frac{x^3}{3}\Big)_0^h = \frac{F_{max} \cdot h}{2} \cdot x_G$$

$$\frac{\cancel{F_{max}}}{\cancel{h}} \cdot \frac{h^{\cancel{3}2}}{3} = \frac{\cancel{F_{max}} \cdot h}{2} \cdot x_G \rightarrow \boxed{x_G = \frac{2}{3} h}$$

q.e.d.

2º → Más general.

Se trata básicamente de lo mismo que antes, pero introduciendo algún concepto más.

De nuevo, igualdad de momentos de la distribución de fuerzas con la fuerza $\overline{F_T}$.

$$\int d\bar{F} \cdot x = F_T \cdot x_G$$

Sustituimos la expresión de fuerza hidrostática:

$$\int (\rho g x \, dS) \cdot x = F_T \cdot x_p$$

$$\int_S \rho g \, x^2 dS = F_T \cdot x_p \rightarrow \boxed{\int_S x^2 dS = \frac{F_T \cdot x_p}{\rho g}}$$

El término $\int_S x^2 dS$ es el llamado momento de inercia de la sección, un concepto ingenieril relacionado con la geometría de la sección dada. No es físicamente comparable al momento de inercia de giro de toda la vida, pero matemáticamente se comporta de forma similar. Se utiliza para el cálculo de resistencias en secciones de vigas en estructuras, pero eso es otra historia.

Así $I_o = \int x^2 dS$. y tenemos: $x_p = \frac{I_o \rho g}{F_T}$

Sustituyendo F_T por $\rho g S x_G$ $\rightarrow \boxed{x_p = \frac{I_o \cancel{\rho g}}{\cancel{\rho g} S x_G} = \frac{I_o}{S x_G}}$

Es conveniente expresar ese momento de inercia con respecto al centro de masas

Aplicando el teorema de Steiner (sí, también se aplica a este momento de inercia).

$$I_0 = I_G + S x_G^2$$

Con lo cual:

$$x_p = \frac{I_G + S x_G^2}{S x_G} \Rightarrow \boxed{x_p = x_G + \frac{I_G}{S x_G}}$$

La expresión más general para el cálculo del centro de presiones en una presa de geometría dada (podrían habernos dado una presa triangular, circular etc.)

En nuestro caso:

$$I_G = \frac{bh^3}{12}$$ (m. de inercia de sección rectangular respecto de eje que pasa por el c. de masas).

Así:

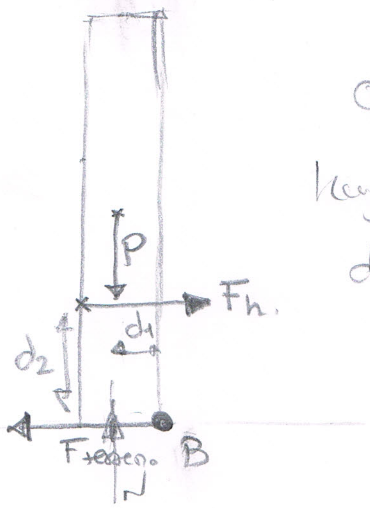
$$x_p = x_G + \frac{bh^3/12}{bh \cdot x_G}$$

$$\boxed{x_p = \frac{h}{2} + \frac{bh^3/12}{bh \cdot h/2} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{6h+2h}{12} = \frac{8h}{12} = \frac{2}{3}h}$$

El resultado esperado, en la posición del baricentro del triángulo

Más largo este procedimiento, pero permitiría, como digo, el cálculo de centros de presiones en secciones no rectangulares.

c) Vuelco de presa:



Obviamente existe equilibrio de fuerzas y no hay desplazamiento, pero la presa puede volcar, debido al momento que aparece en el punto B por el peso y la fuerza hidrostática.

Para evitar el vuelco, el momento creado por P debe ser superior al de Fh. respecto del eje que contiene a B. En el caso límite, para hallar densidad mínima.

Entonces:

$$\boxed{P \cdot d_1 = F_h \cdot d_2}$$

$$P = m \cdot g \Rightarrow \rho_{presa} \cdot V \cdot g \Rightarrow \rho_{presa} \cdot \overbrace{(100 \cdot 6 \cdot 2)}^{\text{paralelepípedo}} \cdot 9'8$$

$$F_h = \frac{\rho g b h^2}{2} = \rho g S x_G = 1'764 \times 10^7 \, N$$

$$(\rho_{presa} \cdot 100 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 9'8) \cdot 1 = 1'764 \times 10^7 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 6\right)$$

$$\boxed{\rho_{presa} = \frac{1'764 \times 10^7 \cdot 2}{100 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 9'8} = 3000 \ \frac{Kg}{m^3}}$$

Un valor aproximado a la densidad del hormigón armado, unos 2500 Kg/m³, por lo que es una solución que entra en en números plausibles. Nada dicen del terreno, que tendría mucho que decir, valga la redundancia.