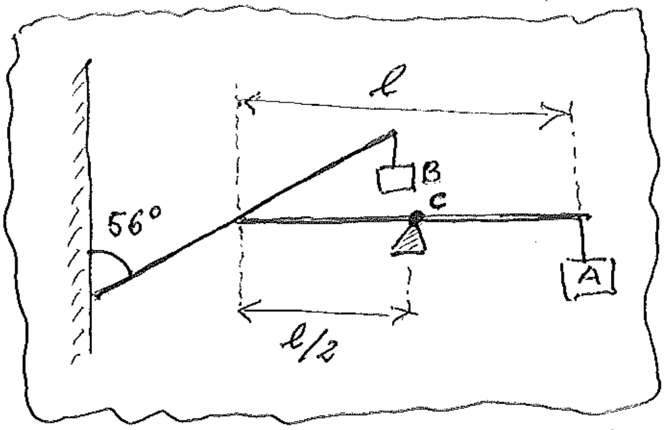
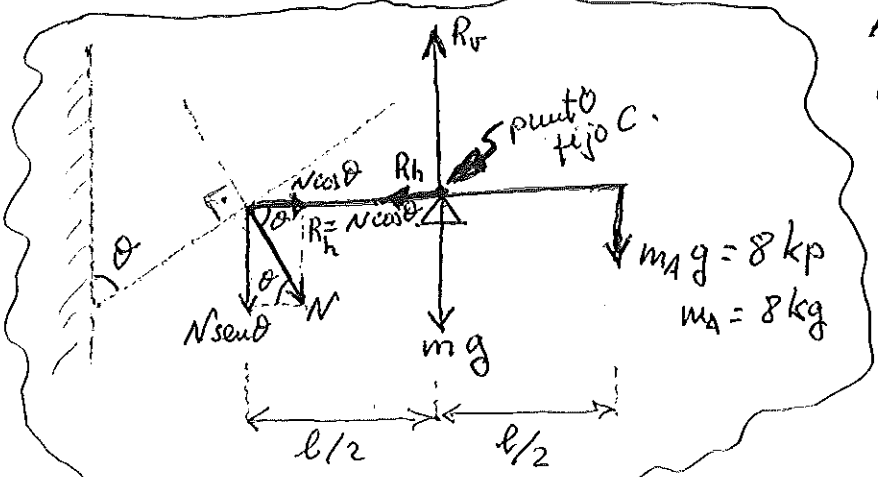
PRÁCTICO CASTILLA - LA MANCHA 2015

(1) Dos barras homogéneas de igual masa y longitud se encuentran dispuestas como se indica en la figura. El contacto entre las barras se produce en el punto medio de una de ellas.



Despreciando el rozamiento en los puntos de contacto entre los diferentes cuerpos, siendo C una articulación o punto fijo y sabiendo que de ambas barras cuelgan dos pesos A y B, siendo el peso de A de 8 kp, determine: el peso de B para que el sistema esté en equilibrio, así como las reacciones en el punto de contacto entre ambas barras y entre la barra oblicua con la pared vertical.

• Solución: Es un problema clásico de estática en el que debemos aplicar las dos condiciones para el equilibrio estático: anular la suma de fuerzas y de momentos. Elaboramos el diagrama de cuerpo libre para la barra horizontal de masa m:



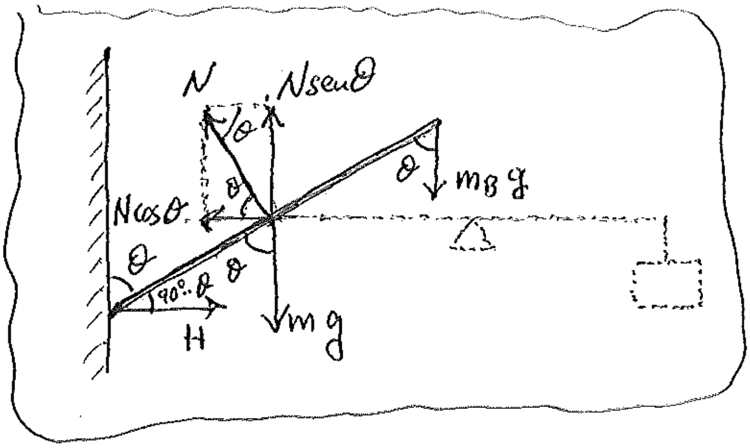
Aplicamos un balance de momentos con respecto a C:

$$N\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\ell}{2} = m_A g\,\frac{\ell}{2} \;\therefore$$

$$\therefore\; N = \frac{m_A g}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{8\ \mathrm{kp}}{\mathrm{sen}\,56^\circ} \;\therefore$$

$$\therefore\; \boxed{N = 9{,}65\ \mathrm{kp}}$$

Elaboramos el diagrama de cuerpo libre para la barra oblicua apoyada en la pared vertical:



Aplicamos un balance de fuerzas horizontales:

$$H = N\cos\theta = \frac{m_A g}{\text{sen}\,\theta}\cos\theta$$

$$H = \frac{m_A g}{tg\,\theta} = \frac{8\,kp}{tg\,56^\circ} \therefore$$

$$\therefore \boxed{H = 5{,}40\,kp}$$

Aplicamos un balance de momentos en la barra oblicua con respecto a su centro:

$$m_B\, g\, \text{sen}\,\theta \left(\cancel{\frac{\ell}{2}}\right) = H \cdot \underbrace{\cancel{\text{sen}(90^\circ-\theta)}}_{\cos\theta} \cancel{\frac{\ell}{2}} \therefore$$

$$\therefore m_B\, g\, \text{sen}\,\theta = \frac{m_A g}{tg\,\theta}\cdot\cos\theta \therefore m_B\, g\, \text{sen}\,\theta = \frac{m_A g}{\text{sen}\,\theta}\cos^2\theta \therefore$$

$$\therefore m_B\, g = \frac{m_A g}{\text{sen}^2\theta}\cos^2\theta = \frac{m_A g}{tg^2\theta} = \frac{8\,kp}{tg^2 56^\circ}$$

$$\boxed{\text{peso de B} = m_B g = 3{,}64\,kp}$$

No recuerdo si pedían también las reacciones en C, (y m) lo calculo por si acaso:

*Hacemos un balance de momentos de las fuerzas ~~[illegible]~~ en la barra oblicua respecto de su punto de apoyo con la pared vertical: $m g\,\text{sen}\,\theta\cdot\frac{\cancel{\ell}}{2} + m_B\, g\,\text{sen}\,\theta\cdot\cancel{\ell} = N\cdot\underbrace{\cancel{\text{sen}\,90^\circ}}_{1}\cdot\frac{\cancel{\ell}}{2} \therefore$

$$\therefore m g\,\text{sen}\,\theta = N - 2\,m_B\, g\,\text{sen}\,\theta \therefore m g = \frac{N}{\text{sen}\,\theta} - 2\,m_B\, g \therefore$$

$$\therefore m g = \frac{m_A g}{\text{sen}^2\theta} - \frac{2 m_A g}{tg^2\theta} = m_A g\left(\frac{1}{\text{sen}^2\theta} - \frac{2\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\right) = m_A g\,\frac{\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}$$

$$m g = m_A g\left(1 - \frac{1}{tg^2\theta}\right) = 8\,kp\left(1 - \frac{1}{tg^2 56^\circ}\right) \therefore$$

$$\therefore \boxed{\text{peso de cada barra} = m g = 4{,}36\,kp} \quad m = 4{,}36\,kg$$

Ahora nos fijamos en el diagrama de cuerpo libre de la barra horizontal y notamos que $R_h = N \cdot \cos\theta$ ∴

$$\therefore R_h = \frac{m_A g}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \cos\theta = \frac{m_A g}{tg\,\theta} = H \therefore \boxed{R_h = 5{,}40 \text{ kp}}$$

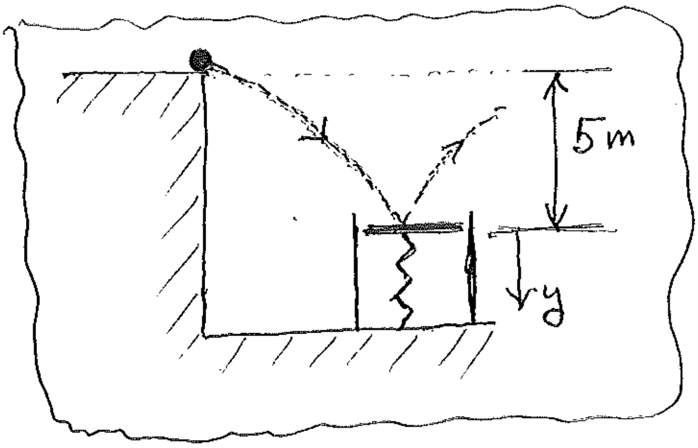
Hacemos un balance de fuerzas verticales para calcular R_v:

$$R_v = N \operatorname{sen}\theta + m g + m_A g = \frac{m_A g}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}} \cdot \cancel{\operatorname{sen}\theta} + m_A g \left(1 - \frac{1}{tg^2\theta}\right) + m_A g =$$

$$= m_A g \left(1 + 1 - \frac{1}{tg^2\theta} + 1\right) = m_A g \left(3 - \cot g^2\theta\right) = 8 \text{kp} \left(3 - ctg^2 56^\circ\right)$$

$$\therefore \boxed{R_v = 20{,}36 \text{ kp}}$$

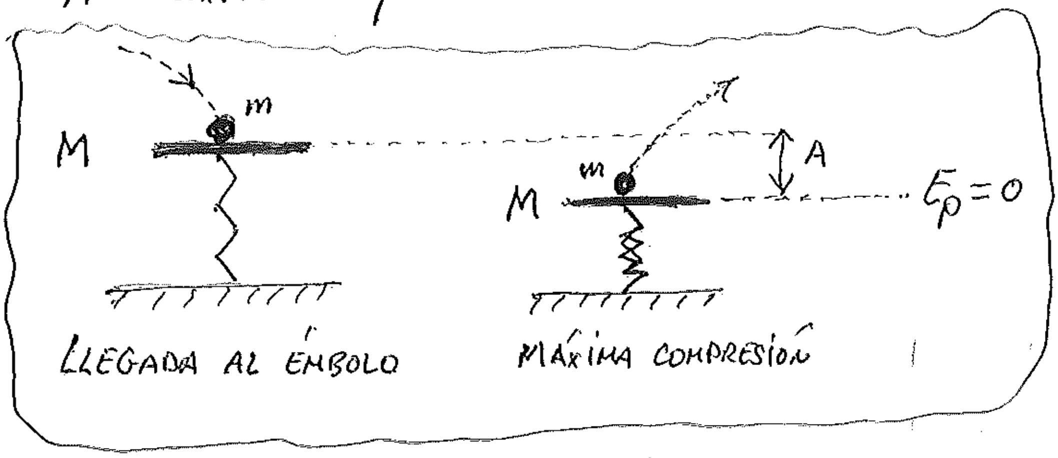
② Una pelota de 500 g situada a 5 m de altura se deja caer sobre un émbolo móvil de 1 kg situado sobre un resorte de constante elástica 400 N/m según indica la figura. Calcule la contracción máxima del muelle y como varía la posición del émbolo con el tiempo.



• Solución: No recuerdo bien si en el problema ponía "se deja caer" o "se lanza" pero está bien claro que hay que lanzar horizontalmente la pelota con velocidad v_0 para que describa la trayectoria que nos dieron en la figura. Asumimos que v_0 es despreciable frente a la velocidad con la que llega al émbolo. De esta manera y aplicando el principio de conservación de la energía, podemos calcular la energía cinética, con la que llega la pelota al émbolo, como energía potencial gravitatoria inicial: $E_{C_{pelota}} = mgh$; $m = 500\,g = 0'5\,kg$; $h = 5\,m$

Volvemos a aplicar el principio de conservación de la energía entre el instante en el que la pelota llega al émbolo y el instante posterior en el que el resorte alcanza la máxima compresión, tomando como origen de energías potenciales $E_p = 0$ la altura a la que se encuentra el émbolo de masa $M = 1\,kg$ en su máxima compresión.

A = máxima deformación del muelle



Teniendo en cuenta que la energía potencial elástica de deformación del muelle vale $E_{Pelástica} = \frac{1}{2} k A^2$; $k = 400\,N/m$; el balance de energías queda:

$$\underbrace{mgh}_{\substack{E_{cinética}\text{ de} \\ \text{la pelota a} \\ \text{la llegada}}} + \underbrace{(m+M)gA}_{\substack{E_{potencial\ gravitatoria} \\ \text{del conjunto pelota +} \\ \text{émbolo, inicial}}} = \frac{1}{2} k A^2$$

En el instante de máxima compresión el émbolo se encuentra en reposo y asumimos que la pelota también por lo que sus energías cinéticas se anulan (al igual que sus energías potenciales gravitatorias, según la referencia tomada en la figura anterior)

De la última ecuación: $\frac{1}{2} k A^2 - (m+M) g A - mgh = 0 \therefore$

$$\therefore 0,5 \cdot 400 \cdot A^2 - 1,5 \cdot 9,8 \cdot A - 0,5 \cdot 9,8 \cdot 5 = 0 \therefore 200A^2 - 14,7A - 24,5 = 0 \therefore$$

$$\therefore A = \frac{14,7 \pm \sqrt{14,7^2 + 4 \cdot 200 \cdot 24,5}}{400} = \frac{14,7 \pm \sqrt{19816,09}}{400} \therefore$$

$$\therefore A = \begin{cases} 0,388674086 \therefore \underline{A \simeq 0'4\ m} \\ \cancel{-0,3152} \leftarrow \text{ABSURDO POR NEGATIVO} \end{cases}$$

Situando el origen del tiempo en el instante en que se alcanza la contracción máxima en el muelle, la ecuación de la posición del émbolo vendrá dada por un MAS: $y = A\ \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)$

En $t=0 \Rightarrow y = +A$ (según eje "y" que nos dieron en la figura inicial) $\Rightarrow A = A\ \text{sen}\,(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \therefore \text{sen}\,\varphi_0 = 1 \Rightarrow \underline{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}}$

Por otro lado la frecuencia angular, ω, será:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ley de Hooke: } F = -ky \\ 2^{a} \text{ de Newton: } F = M \cdot a = M \dfrac{dv}{dt} = -M\omega^2 y \end{array}\right\} \therefore$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\ \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0)\right] = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)\right] = -A\omega^2\ \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y$$

$$\therefore -k\cancel{y} = -M\omega^2 \cancel{y} \therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{400}{1}} = 20\ \text{rad} \cdot s^{-1}$$

Sustituyendo en la ecuación del movimiento en formato seno:

$$\boxed{y = 0,4 \cdot \text{sen}\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y \text{ en metros: m} \\ t \text{ en segundos: s} \end{array}}$$

• (3) Para una disolución de m_{Na} gramos de sodio en amoníaco, de fracción molar X_{Na}, calcule la cantidad de amoníaco necesaria a evaporar para conseguir una concentración final en fracción molar de X'_{Na}, de sodio mayor para la disolución.
Datos: masas atómicas $Na = 23$ $N = 14$ $H = 1$

• Solución:

$Na = 23\ g/mol$; $NH_3 = 14 + 3 = 17\ g/mol$

$n = n^o$ moles

$$X_{Na} = \frac{n_{Na}}{n_{Na} + n_{NH_3}} = \frac{1}{1 + \frac{n_{NH_3}}{n_{Na}}} \therefore 1 + \frac{n_{NH_3}}{n_{Na}} = \frac{1}{X_{Na}} \therefore$$

$$\therefore n_{NH_3} = n_{Na} \cdot \left(\frac{1}{X_{Na}} - 1 \right) \quad \therefore \frac{m_{NH_3}}{17} = \frac{m_{Na}}{23} \left(\frac{1}{X_{Na}} - 1 \right) \therefore$$

$$n_{NH_3} = \frac{m_{NH_3}}{17} \ ; \ n_{Na} = \frac{m_{Na}}{23}$$

* Masa inicial de amoníaco en la disolución:

$$\therefore m_{NH_3} = \frac{17}{23} m_{Na} \left(\frac{1}{X_{Na}} - 1 \right)$$

* Masa final de amoníaco en la disolución después de evaporar:

$$\therefore m'_{NH_3} = \frac{17}{23} m_{Na} \left(\frac{1}{X'_{Na}} - 1 \right)$$

* Masa en gramos de amoníaco que se ha evaporado:

$$m_{NH_3} - m'_{NH_3} = \frac{17}{23} m_{Na} \left(\frac{1}{X_{Na}} \cancel{-1} - \frac{1}{X'_{Na}} \cancel{+1} \right) \therefore$$

$$\therefore \boxed{m_{NH_3} - m'_{NH_3} = \frac{17}{23} m_{Na} \left(\frac{1}{X_{Na}} - \frac{1}{X'_{Na}} \right)}$$

No recuerdo los datos así que a partir de aquí que cada uno deje volar su imaginación. Por ejemplo si la masa de sodio disuelta es de $m_{Na} = 0'125\,g$ y su fracción molar inicial y final es respectivamente: $x_{Na} = 0'2$ y $x'_{Na} = 0'5$; la masa de amoníaco a evaporar será de $m_{NH_3} - m'_{NH_3} = \frac{17}{23} \cdot 0'125 \cdot \left(\frac{1}{0'2} - \frac{1}{0'5} \right) = \underline{\underline{0,277\,g\ NH_3}}$

(4) Calcular el pH y el grado de hidrólisis de una disolución de acetato de amonio 0,1M (no recuerdo bien si era 0,1M o 0'01M, pero, como veremos a continuación, la concentración inicial de sal es irrelevante en el problema que tratamos).

Datos: $K_A\,(HAc) = 1,8 \cdot 10^{-5}$; $K_B\,(NH_3) = 1,8 \cdot 10^{-5}$

$K_A\,(NH_4^+) = 5,6 \cdot 10^{-10}$

• Solución:

$$\begin{array}{lccccc} & NH_4Ac & \xrightarrow{H_2O} & NH_4^+ & + & Ac^- \\ [\,]_0 & C_0 & & — & & — \\ [\,]_{final} & — & & C_0 & & C_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc} & NH_4^+ & + & Ac^- & \underset{}{\overset{K_h}{\rightleftharpoons}} & NH_3 & + & HAc \\ [\,]_0 & C_0 & & C_0 & & — & & — \\ [\,]_{eq} & C_0(1-\alpha) & & C_0(1-\alpha) & & C_0\alpha & & C_0\alpha \end{array}$$

α = grado de hidrólisis

K_h = constante de hidrólisis.

$$K_h = \frac{[NH_3][HAc]}{[NH_4^+][Ac^-]}$$ Multiplicamos y dividimos por el producto iónico del agua: $K_W = [H^+][OH^-] = 10^{-14}$

$$K_h = \frac{[NH_3][HAc][H^+][OH^-]}{[NH_4^+][Ac^-][H^+][OH^-]} = \frac{[H^+]\cdot[OH^-]}{\frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]} \cdot \frac{[Ac^-][H^+]}{[HAc]}}$$

Por otro lado:

$$NH_3 + H_2O \underset{}{\overset{K_B = 1{,}8\cdot 10^{-5}}{\rightleftarrows}} NH_4^+ + OH^- \quad ; \quad HAc \overset{K_A = 1{,}8\cdot 10^{-5}}{\rightleftarrows} H^+ + Ac^-$$

$$K_B = \frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]} \qquad K_A = \frac{[H^+][Ac^-]}{[HAc]}$$

$K_A = K_B = 1{,}8\cdot 10^{-5}$

Sustituyendo en K_h:

$$K_h = \frac{K_W}{K_B \cdot K_A} = \frac{10^{-14}}{(1{,}8\cdot 10^{-5})^2} = 3{,}08642\cdot 10^{-5}$$

Por otro lado: $K_h = \dfrac{\cancel{c_0^2}\,\alpha^2}{\cancel{c_0^2}\,(1-\alpha)^2} = \dfrac{\alpha^2}{1-2\alpha+\alpha^2}$

$\therefore\ 3{,}08642\cdot 10^{-5} = \dfrac{\alpha^2}{1-2\alpha+\alpha^2}$ $\therefore\ 3{,}08642\cdot 10^{-5} - 2\cdot 3{,}08642\cdot 10^{-5}\alpha + 3{,}08642\cdot 10^{-5}\alpha^2 = \alpha^2$

$$\alpha^2 + 6{,}17284\cdot 10^{-5}\alpha - 3{,}08642\cdot 10^{-5} = 0$$

$$\alpha = \frac{-6{,}17284\cdot 10^{-5} \pm \sqrt{(6{,}17284\cdot 10^{-5})^2 + 4\cdot 3{,}08642\cdot 10^{-5}}}{2} =$$

$= \dfrac{-6{,}17284\cdot 10^{-5} - 0{,}011111}{2}$ = NEGATIVO, ¡ABSURDO!

$= \dfrac{-6{,}17284\cdot 10^{-5} + 0{,}011111}{2} = 5'5249467\cdot 10^{-3}$

$$\boxed{\alpha = 0{,}005525 = 0{,}5525\ \%}$$

(Si uno tiene prisa, puesto que K_h es pequeña, podemos despreciar α frente a 1 $\Rightarrow 1-\alpha \simeq 1 \therefore K_h \simeq \alpha^2 \therefore$
$\therefore\ \alpha = \sqrt{K_h} = \sqrt{3{,}08642\cdot 10^{-5}} = 0{,}0056 = 0{,}56\%$)

Para calcular el pH: $[H^+] = \dfrac{K_A[HAc]}{[Ac^-]} = \dfrac{K_A\,\cancel{c_0}\,\alpha}{\cancel{c_0}(1-\alpha)} = K_A\sqrt{K_h} = K_A\sqrt{\dfrac{K_W}{K_B K_A}} =$

$= \sqrt{\dfrac{K_A^2 K_W}{K_B \cancel{K_A}}} = \sqrt{\dfrac{K_A K_W}{K_B}}$ $\therefore$ $pH = -\log[H^+] = -\dfrac{1}{2}(\log K_A + \log K_W - \log K_B) =$

$= \dfrac{1}{2}(\log K_B - \log K_A - \log K_W) = \dfrac{\log K_B - \log K_A + 14}{2} = 7 + \dfrac{\cancel{\log K_B - \log K_A}}{2}$ $\therefore$

0 $(K_A = K_B = 1{,}8\cdot 10^{-5})$

$\therefore\ \boxed{pH = 7}$