X6:

3. Un mol de gas diatòmic es troba a 300 K i ocupa un volum de 3 litres. S'expandeix a temperatura constant fins a doblar el seu volum, es refreda a pressió constant fins un cert estat a partir del qual segueix un procés adiabàtic que el torna a la posició inicial. Calcular:

CAT/96

a) El valor de P, V i T en els estats 2 i 3
b) L'intercanvi de Q i W en cada procés
c) El rendiment del cicle
d) La variació d'energia interna en recórrer el cicle

Un mol de gas diatómico se encuentra a 300K y ocupa un volumen de 3 litros. Se expande a temperatura constante hasta doblar su volumen, se enfría a presión constante hasta un cierto estado a partir del cual sigue un proceso adiabático que lo lleva a la posición inicial. Calcular

a) El valor de P, V y T en los estados 2 y 3.
b) El intercambio de Q y W en cada proceso.
c) El rendimiento de ciclo.
d) La variación de energía interna al recorrer el ciclo.

$n = 1 mol$

Gas diatómico

$$\boxed{\text{ESTADO 1}} \xrightarrow[\text{a } T = cte]{\text{EXPANSIÓN}} \boxed{\text{ESTADO 2}} \xrightarrow[p = cte]{\text{ENFRIAMIENTO}} \boxed{\text{ESTADO 3}}$$

ESTADO 1	ESTADO 2	ESTADO 3
$T_1 = 300K$	$T_2 = 300K$	
$V_1 = 3L$	$V_2 = 6L$	
	P_2	$P_3 = P_2$

PROCESO ADIABÁTICO $dQ = 0$

Suponemos gas ideal:

Aplicando ec. de los gases ideales ($pV = nRT$) es posible determinar la presión en el estado 2:

$$p \cdot V = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow p_2 = \frac{nRT_2}{V_2}$$

así pues, sustituyendo los datos conocidos y considerando que las constante de los gases tiene un valor de $R = 0{,}082$ atm.L / k mol, se obtiene:

$$\boxed{p_2 = 4{,}1 \text{ atm.}}$$

En un proceso a T=cte se verifica la ley de Boyle

$$pV = cte \Rightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow p_1 = p_2 \frac{V_2}{V_1}$$

luego sustituyendo datos

$$\boxed{p_1 = 8{,}2 \text{ atm.}}$$

Por otra parte, como $p_3 = p_2$, entonces.

$$\boxed{p_3 = 4{,}1 \text{ atm}}$$

Además, considerando el proceso adiabático:

$$pV^{\gamma} = cte \Rightarrow p_1 \cdot V_1^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma} \Rightarrow V_3 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{1/\gamma}$$

donde, para un gas diatómico, el coeficiente adiabático es $\gamma = 7/5$, se deduce que:

$$V_3 = 4{,}922012136 \, L \Rightarrow \boxed{V_3 = 4{,}9 \, L}$$

Por último, considerando de nuevo el proceso adiabático:

$$T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cte \Rightarrow T_1 \cdot p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 \cdot p_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow T_3 = T_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

luego:

$T_3 = 246,1006068\ K \Rightarrow \boxed{T_3 = 246K}$

Resumiendo:

$$\boxed{\text{ESTADO 1}} \xrightarrow[T=cte]{\text{EXPANSIÓN}} \boxed{\text{ESTADO 2}} \xrightarrow[p=cte]{\text{ENFRIAMIENTO}} \boxed{\text{ESTADO 3}}$$

ESTADO 1	ESTADO 2	ESTADO 3
$T_1 = 300K$	$T_2 = 300K$	$T_3 = 246K$
$V_1 = 3L$	$V_2 = 6L$	$V_3 = 4,9L$
$p_1 = 8,2atm$	$p_2 = 4,1atm$	$p_3 = 4,1atm.$

PROC. ADIABATICO $dQ = 0$

b) Aplicaremos el primer principio de la termodinámica: $dU = dQ + dW$ donde dQ y dW son > si se absorbe o se realiza sobre el sistema (criterios IUPAC). Además emplearemos las definiciones:

$dU = nC_v dT$

$dW = -pdV$

Así pues:

- <u>Expansión a $T = cte$</u> (proceso $1 \to 2$)

Por $dT = 0 \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow \Delta U_{12} = 0$, luego

$dQ = -dW \Rightarrow dQ = -dW = pdV = nRT\frac{dV}{V} \Rightarrow$

$\int dQ = -\int dW = nRT\int\frac{dV}{V} \Rightarrow Q = -W = nRT\ln\frac{V'}{V}$

Y sustituyendo datos y considerando $R = 8,314\ \frac{J}{mol K}$

$Q_{12} = -W_{12} = n R . T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = 1728,847698\ J \Rightarrow$

$\boxed{Q_{12} = 1729\ J}$ $\boxed{W_{12} = -1729\ J}$

· Enfriamiento a $p = cte$ (proceso $2 \to 3$)

$$W_{23} = -p_2 \Delta V_{23} = -p_2 (V_3 - V_2) = p_2 (V_2 - V_3)$$

De modo que sustituyendo los datos conocidos y considerando que:

$$1 atm \cdot L = 1 atm \cdot L \cdot \frac{101325 Pa}{1 atm} \cdot \frac{1 m^3}{10^3 L} = 101{,}325 J$$

se obtiene que:

$$W_{23} = 447{,}8311933 \ J \Rightarrow \boxed{W_{23} = 448 \ J}$$

Además:

$$\Delta U_{23} = n C_v \Delta T_{23}$$

donde como

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \dfrac{C_p}{C_v} \\ C_p = C_v + R \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma = \frac{C_v + R}{C_v} \rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

de modo que si $R = 8{,}314 \ J/mol K$, se tiene que para este gas diatómico:

$$C_v = 20{,}785 \ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$$

Por lo tanto sustituyendo los correspondientes datos:

$$\Delta U_{23} = -1120{,}298888 \ J \Rightarrow \boxed{\Delta U_{23} = -1120 \ J}$$

y como:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W \Rightarrow Q_{23} = \Delta U_{23} - W_{23}$$

sustituyendo se tiene:

$$Q_{23} = -1568{,}13008 7 \ J \Rightarrow \boxed{Q_{23} = -1568 \ J}$$

· Proceso adiabático (proceso $3 \to 1$):

Por definición, un proceso adiabático es aquel que tiene lugar sin intercambio de calor, entonces:

$\boxed{Q_{31} = 0}$

Así pues si

$dU = dQ + dW$ y $dQ = 0 \Rightarrow dU = dW$

luego:

$\Delta U_{31} = W_{31}$

Este valor se pueden determinar:

$\Delta U_{31} = nC_v \Delta T_{31} = 1120{,}29888\,J \Rightarrow \boxed{\Delta U_{31} = 1120\,J}$

$W_{31} = \frac{1}{\gamma - 1}(P_1 \cdot V_1 - P_3 V_3) = 1119{,}57983\,J \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{W_{31} = 1120\,J}$ $\quad$ $1\,atm \cdot l = 101{,}325\,J$

Resumiendo:

$\boxed{\text{PROCESO } 1 \to 2}$	$\boxed{\text{PROCESO } 2 \to 3}$	$\boxed{\text{PROCESO } 3 \to 1}$
$Q_{12} = 1729\,J$	$Q_{23} = -1568\,J$	$Q_{31} = 0$
$W_{12} = -1729\,J$	$W_{23} = 448\,J$	$W_{31} = 1120\,J$
$\Delta U_{12} = 0$	$\Delta U_{23} = -1120\,J$	$\Delta U_{31} = 1120\,J$

En un ciclo se verifica:

(a) $Q_T + W_T = 0$

$Q_T = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = 160{,}719617\,J$

$W_T = W_{12} + W_{23} + W_{31} = -161{,}438521\,J$

Se verifica.

(b) La variación de la energía interna en él es cero por ser una función de estado:

$\Delta U_T = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$

c) Por definición el rendimiento de un ciclo:

$$\eta = \frac{|W_T|}{Q_{suministrado}}$$

como

$$Q_{suministrado} = 1729\ J$$

se tiene:

$$\eta = 0{,}0933792617 \rightarrow \eta = 0{,}09 \text{ es decir } 9\%.$$

d) Ya respondido en (b) : $\Delta U_T = 0$