

1-)

- a) Para que un planeta esté en órbita estable se debe cumplir que la Fuerza centrípeta sea igual a la Fuerza gravitatoria:

$$F_c = F_g, m \cdot v^2/r = G \cdot (Mm)/r^2 \quad \text{despejando } v = \sqrt{GM/r}$$

Como el periodo $T = 2\pi r/v$

$$\text{Despejando } v \text{ en las dos e igualando: } \sqrt{GM/r} = 2\pi r/T$$

$$\text{Y despejando } T^2 = (4\pi^2 r^3/GM)$$

Para obtener la M, aplico la ley de Kepler:

$$T^2 = k r^3, T^2 = (4\pi^2/GM) r^3, M = (4\pi^2/GT) r^3, \text{ Sustituyendo, con } r_2 = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m y}$$

$$T_2 = 31536000 \text{ s} = 1 \text{ año, obtengo } M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

$$\text{Así, } T^1 = 6,8 \cdot 10^7 \text{ s} = 2,42 \text{ años.}$$

También se podía haber resuelto por comparación con la ley de Kepler:

$$T_1^2/T_2^2 = r_1^3/r_2^3 \text{ con } T_2 = 31536000 \text{ s, } r_1 = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ m, y } r_2 = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m.}$$

$$\text{Así: } T_1 = 2,4 \text{ años.}$$

- b) La Energía total de un satélite viene dada por:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} (GMm)/r$$

Por comparación, solo quedan los radios:

$$E_{m1}/E_{m2} = 2,5/1,5 \quad E_{m1} = 1,66 E_{m2}$$

Análogamente, con la velocidad, $v = (2\pi r)/T$

$$v_p/v_a = r_p/r_a, \quad v_a = 1,66 v_p$$

- c) Primero obtenemos la masa del planeta, $m = M/10^5 \quad m = 2 \cdot 10^{25} \text{ kg.}$

Con la ecuación del centro de masas, tomando la estrella como origen de coordenadas:

$$r_{cm} = (\sum m_i r_i)/\sum m_i, \text{ sustituyendo: } r_{cm} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ m}$$

- d) La velocidad de escape viene dada por: $V_e = \sqrt{2Gm/r}$

$$\text{Así } V_e = 16334 \text{ m/s}$$

- e) Tomando: $t' =$ Tiempo para el tripulante, ligado al sistema móvil.
 $t =$ Tiempo desde la estrella, observador exterior.

$$\text{Por relatividad: } t' = t \cdot (1-v^2/c^2)^{1/2}$$

$$\text{Así: } t = e/v = 1041,66 \text{ s, y } t' = 625 \text{ s.}$$