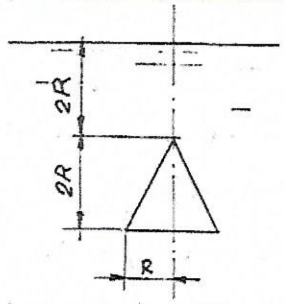
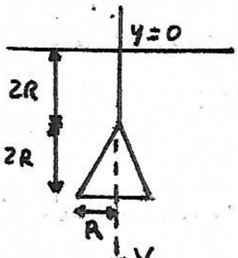
20. Determinar el trabajo mínimo necesario para sacar fuera del líquido un cono macizo que está sumergido en él, según la figura. El eje del cono permanece siempre vertical y el nivel del líquido constante.
Radio de la base del cono..................................R
Altura del cono..2R
Densidad del líquido...d
Densidad del cono..2d



Andalucía XXXX.F2.



$d_L = d \quad d_c = 2d \quad W = ?$

La fuerzas a las que está sometido el cono cuando está sumergido son el empuje y el peso.

El peso es constante a lo largo de todo el desplazamiento, pero el empuje sólo es constante mientras está totalmente sumergido, lo que ocurre en la primera mitad del recorrido.

Tomaremos como dirección del desplazamiento el eje Y con origen $y=0$ en la superficie libre del líquido y sentido positivo hacia abajo. En la primera mitad del recorrido la base del cono se desplaza desde 4R hasta 2R y en la segunda mitad del recorrido, desde 2R hasta 0.

Para el cálculo del trabajo también distinguimos dos etapas, de forma que el trabajo total será: $W = W_1 + W_2$

<u>Cálculo de W_1:</u>

En esta etapa, tanto el peso del cono como el empuje son constantes y de valores:

$$P = m_c g = V_c d_c g = S_c h_c d_c g = \pi R^2 \cdot 2R \cdot 2d\, g = 4\pi d g R^3$$

$$E_1 = m_{liq\ des.}\, g = V_c d_L g = S_c h_c d_L g = \pi R^2 \cdot 2R \cdot d\, g = 2\pi d g R^3$$

La fuerza que ha de hacerse para elevar el cono desde 4R hasta 2R será:

$F = E - P$ y el trabajo para un desplazamiento elemental dy será

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dy} = F \cdot dy \cos \overset{1}{0} = (E_1 - P)\, dy = (2\pi d g R^3 - 4\pi d g R^3)\, dy = -2\pi d g R^3 dy$$

$$W_1 = \int_0^{W_1} dW = \int_{4R}^{2R} -2\pi d g R^3 dy = -2\pi d g R^3 \int_{4R}^{2R} dy = -2\pi d g R^3 \left[y\right]_{4R}^{2R}$$

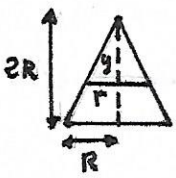
$$\boxed{W_1 = -2\pi d g R^3 (2R - 4R) = 4\pi d g R^4 \text{ J.}}$$

(20) (Continuación)

Cálculo de W_2:

En la segunda mitad del desplazamiento, entre $2R$ y 0, el peso sigue siendo constante y del mismo valor que en el caso anterior.

El empuje, E_2, varía según va variando el volumen sumergido del cono. Ese volumen sumergido lo podemos poner como diferencia del volumen total del cono menos el volumen emergido: $V_S = V_c - V_E$. El volumen emergido será el correspondiente al de un cono de altura variable "y" y de radio de la base variable "r", por tanto:



$$V_E = \pi r^2 y$$

La relación entre r e y la obtenemos de establecer una relación de semejanza entre los dos triángulos (pequeño y grande) de la figura:

$$\frac{y}{2\cancel{R}} = \frac{r}{\cancel{R}} \longrightarrow r = \frac{y}{2}$$

así que: $V_E = \pi \frac{y^2}{4} y = \frac{\pi}{4} y^3$ y el volumen sumergido: $V_S = \pi R^2 \cdot 2R - \frac{\pi}{4} y^3$

y el empuje: $E_2 = \left(2\pi R^3 - \frac{\pi}{4} y^3\right) dg$

El trabajo será: $dW = \vec{F}\,d\vec{y} = F\,dy \cos 0 = (E_2 - P)\,dy$

$$W_2 = \int_0^{W_2} dW = \int_{2R}^{0} (E_2 - P)\,dy = \int_{2R}^{0}\left(2\pi R^3 - \frac{\pi}{4} y^3 - 4\pi R^3\right) dg\,dy = \int_{2R}^{0}\left(-\frac{\pi}{4} y^3 - 2\pi R^3\right) dg\,dy$$

$$W_2 = -dg \int_{2R}^{0} \frac{\pi}{4} y^3\,dy - dg \int_{2R}^{0} 2\pi R^3\,dy = -dg\frac{\pi}{4}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{2R}^{0} - dg \cdot 2\pi R^3 \left[y\right]_{2R}^{0}$$

$$\boxed{W_2 = -dg\frac{\pi}{4}\left(-\frac{16R^4}{4}\right) - dg\,2\pi R^3(-2R) = \pi dg R^4 + 4\pi dg R^4 = 5\pi dg R^4}$$

El trabajo total será:

$$\boxed{W = W_1 + W_2 = 4\pi dg R^4 + 5\pi dg R^4 = 9\pi dg R^4\ \mathrm{J}}$$