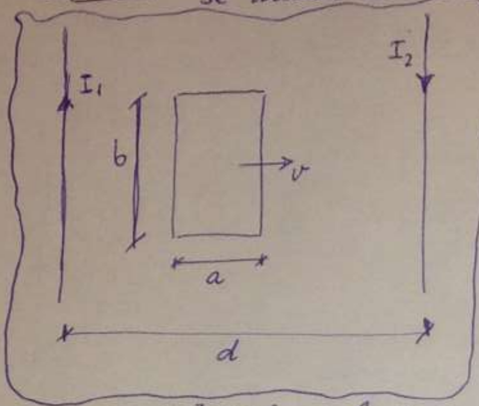
OPOS. VALENCIA 2001

(2) FÍSICA Una espira rectangular de lados $a = 10\,cm$ y $b = 20\,cm$ se mueve con velocidad constante de valor $v = 2\,m\cdot s^{-1}$, entre dos corrientes rectilíneas, paralelas e indefinidas de intensidades $I_1 = 10\,A$ e $I_2 = 20\,A$, separadas entre sí una distancia $d = 8\,m$, tal como se representa en la figura adjunta. Inicialmente, la espira se encuentra junto a la línea de corriente de intensidad I_1, sin hacer contacto metálico con ella. Sabiendo, además, que la permeabilidad magnética del vacío es $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,N\cdot A^{-2}$, calcule:



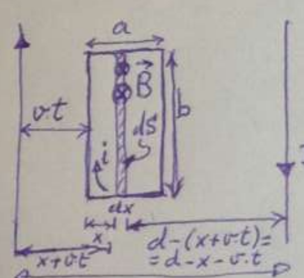
a) Expresión del flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo, t.

b) El valor de la fuerza electromotriz inducida, transcurridos 3 segundos.

• Solución: Se supondrá que la resistencia de la espira es tan grande que se puede despreciar el efecto de la corriente inducida.

$\boxed{\text{1}^{er}\text{ Método.}}$

• a) En un instante, t:



* CONDUCTOR (1):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+vt)} \quad ; \quad dS = b\,dx$$

$$|\phi_1| = \left|\int_S \vec{B}_1\cdot d\vec{S}\right| = \int_0^a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+vt)}\,b\,dx = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\int_0^a \frac{dx}{x+vt}$$

Cambio de variable $\Rightarrow \begin{cases} u = x+vt \\ du = dx \end{cases}$

$$|\phi_1| = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\int_{vt}^{a+vt}\frac{du}{u} = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{a+vt}{vt} = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{vt}\right)$$

* CONDUCTOR (2):

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x-vt)} \quad ; \quad |\phi_2| = \left|\int_S \vec{B}_2\cdot d\vec{S}\right| = \int_0^a \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x-vt)}\,b\,dx = \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi}\int_0^a \frac{dx}{d-x-vt}$$

Cambio de variable $\Rightarrow \begin{cases} u = d-x-vt \\ du = -dx \end{cases} \Rightarrow |\phi_2| = \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi}\int_{d-vt}^{d-a-vt}\frac{(-du)}{u} = -\frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi}\cdot\ln\frac{d-a-vt}{d-vt}$ ∴

$$\therefore\ |\phi_2| = -\frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi}\ln\left(1-\frac{a}{d-vt}\right)$$

* CONDUCTOR (1)+(2): $|\phi_{TOTAL}| = |\phi_1| + |\phi_2| = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{vt}\right) - \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi}\ln\left(1-\frac{a}{d-vt}\right) =$

$$= \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left[I_1\cdot\ln\left(1+\frac{a}{v\cdot t}\right) - I_2\ln\left(1-\frac{a}{d-vt}\right)\right] = \frac{\mu_0\cdot b}{2\pi}\left[\ln\left(1+\frac{a}{v\cdot t}\right)^{I_1} - \ln\left(1-\frac{a}{d-v\cdot t}\right)^{I_2}\right] \therefore$$

$$\therefore \boxed{|\phi_{TOTAL}| = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \cdot \ln \frac{\left(1+\frac{a}{vt}\right)^{I_1}}{\left(1-\frac{a}{d-vt}\right)^{I_2}}}$$

Sustituimos datos: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A²

$a = 10$ cm $= 0{,}1$ m ; $I_1 = 10$ A

$b = 20$ cm $= 0{,}2$ m ; $I_2 = 20$ A

$d = 8$ m ; $v = 2$ m/s

$$|\phi_{TOTAL}| = \frac{4\cancel{\pi}\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}2}{2\cancel{\pi}} \ln \frac{\left(1+\frac{0{,}1}{2t}\right)^{10}}{\left(1-\frac{0{,}1}{8-2t}\right)^{20}} = \frac{4\cdot 10^{-7}\cdot \cancel{2}\, 0{,}1}{\cancel{2}} \ln \frac{\left(1+\frac{1}{20t}\right)^{10}}{\left(1-\frac{1}{80-20t}\right)^{20}} =$$

$$= 4\cdot 10^{-7} \ln \left[\frac{\left(1+\frac{1}{20t}\right)^{10}}{\left(1-\frac{1}{80-20t}\right)^{20}}\right]^{0{,}1} \Rightarrow \boxed{|\phi_{TOTAL}| = 4\cdot 10^{-7} \ln \frac{1+\frac{1}{20\cdot t}}{\left(1-\frac{1}{80-20\cdot t}\right)^2}}$$

t en segundos, s
ϕ en wéber, Wb

• b) $|\mathcal{E}| = \left|-\frac{d\phi}{dt}\right| = \frac{d|\phi_{TOTAL}|}{dt}$

$$|\mathcal{E}| = 4\cdot 10^{-7}\frac{d}{dt}\left[\ln \frac{1+\frac{1}{20t}}{\left(1-\frac{1}{80-20t}\right)^2}\right] = 4\cdot 10^{-7}\frac{d}{dt}\left[\ln\left(1+\frac{1}{20t}\right) - 2\ln\left(1-\frac{1}{80-20t}\right)\right] =$$

$$= 4\cdot 10^{-7}\left[\frac{\left(-\frac{1}{20t^2}\right)}{1+\frac{1}{20t}} - 2\cdot \frac{\frac{(-20)}{(80-20t)^2}}{1-\frac{1}{80-20t}}\right] ; \boxed{|\mathcal{E}| = 4\cdot 10^{-7}\left[\frac{40}{(80-20t)^2-80+20t} - \frac{1}{t(1+20t)}\right]}$$

* Para $\underline{t = 3\,s}$:

$$|\mathcal{E}| = 4\cdot 10^{-7}\left[\frac{40}{(80-20\cdot 3)^2-80+20\cdot 3} - \frac{1}{3(1+20\cdot 3)}\right] =$$

t en segundos, s
$\mathcal{E}$ en voltios, V

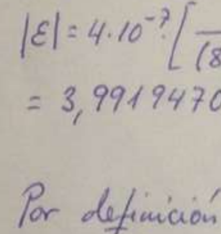
$= 3{,}991947081\cdot 10^{-8}$ V $\therefore \boxed{|\mathcal{E}| = 4{,}0\cdot 10^{-8}\text{ V} = 40\text{ nV}}$

2º Método

Por definición: $\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$. Utilizando la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ $\therefore$ $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v}\times\vec{B}$

$\boxed{\mathcal{E} = \oint(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$. Entonces: $(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = |\vec{v}\times\vec{B}||d\vec{l}|\cos\alpha$

En cualquier caso $\vec{v}\perp\vec{B}$, es decir, $|\vec{v}\times\vec{B}| = vB\,\underbrace{\text{sen}\,90^\circ}_{1} = vB$

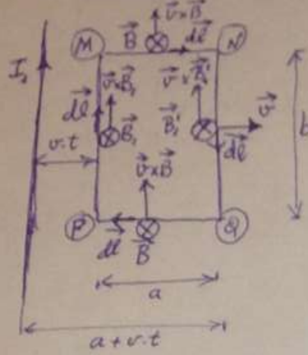


espira rectangula

En los tramos horizontales de la espira rectangular (QP y MN) el vector $\vec{v}\times\vec{B}$ apunta verticalmente hacia arriba y es perpendicular al hilo ($d\vec{l}$) $\Rightarrow (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = |\vec{v}\times\vec{B}||d\vec{l}|\underbrace{\cos 90^\circ}_{0} = 0$; por lo que no contribuyen a la fuerza electromotriz. Los tramos verticales de la espira (PM y NQ) son paralelos a $\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow d\vec{l} \parallel (\vec{v}\times\vec{B}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = |\vec{v}\times\vec{B}|\cdot|d\vec{l}|\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = |\vec{v}||\vec{B}|\underbrace{\text{sen}\,90^\circ}_{1}|d\vec{l}|\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = vB\,dl$ (o antiparalelos $(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = vB\cos 180^\circ = -vB$; $\vec{B}$ 180° $d\vec{l}$)

* CONDUCTOR ①:



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi v t} \quad ; \quad B_1' = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi (a+vt)}$$

$$\mathcal{E}_1 = \int_P^M (\vec{v}\times\vec{B}_1)\cdot\vec{dl} + \int_N^Q (\vec{v}\times\vec{B}_1')\cdot\vec{dl} =$$

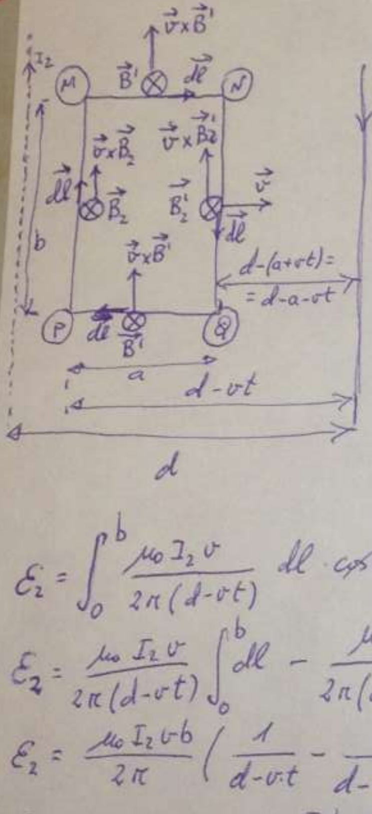
$$= \int_P^M v B_1 \, dl \cos 0^\circ + \int_N^Q v B_1' \, dl \cos 180^\circ =$$

$$= \int_0^b \frac{\mu_0 I_1 v}{2\pi v t} dl - \int_0^b \frac{\mu_0 I_1 v}{2\pi (a+vt)} dl =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi t}\int_0^b dl - \frac{\mu_0 I_1 v}{2\pi (a+vt)}\int_0^b dl =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi t} - \frac{\mu_0 I_1 v b}{2\pi (a+vt)} \therefore \mathcal{E}_1 = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\left(\frac{1}{t} - \frac{v}{a+vt}\right) = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{a}{v}+t}\right)$$

* CONDUCTOR ②



$$\mathcal{E}_2 = \int_P^M (\vec{v}\times\vec{B}_2)\cdot\vec{dl} + \int_N^Q (\vec{v}\times\vec{B}_2')\cdot\vec{dl}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d - vt)} \quad ; \quad B_2' = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d-a-vt)}$$

$$\mathcal{E}_2 = \int_0^b \frac{\mu_0 I_2 v}{2\pi (d-vt)} dl \cdot \cos 0^\circ + \int_0^b \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d-a-v\cdot t)} dl \cdot \cos 180^\circ$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mu_0 I_2 v}{2\pi (d-vt)}\int_0^b dl - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d-a-vt)}\int_0^b dl = \frac{\mu_0 I_2 v b}{2\pi (d-vt)} - \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi (d-a-vt)}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mu_0 I_2 v b}{2\pi}\left(\frac{1}{d-v\cdot t} - \frac{1}{d-a-v\cdot t}\right) = \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{d}{v}-t} - \frac{1}{\frac{d-a}{v}-t}\right)$$

$$\mathcal{E}_{TOTAL} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{a}{v}+t}\right) + \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{d}{v}-t} - \frac{1}{\frac{d-a}{v}-t}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{TOTAL} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left[I_1\cdot\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{a}{v}+t}\right) + I_2\cdot\left(\frac{1}{\frac{d}{v}-t} - \frac{1}{\frac{d-a}{v}-t}\right)\right]}$$

• b) * Para $t = 3s$:

$$\mathcal{E}_{TOTAL} = \frac{4\cancel{\pi}\cdot 10^{-7}\cdot 0,2}{2\cancel{\pi}}\left[10\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\frac{0,1}{2}+3}\right)+20\cdot\left(\frac{1}{\frac{8}{2}-3}-\frac{1}{\frac{8-0,1}{2}-3}\right)\right]=$$

$$= -3,991947081\cdot 10^{-8}\,V \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{TOTAL} = -4,0\cdot 10^{-8}\,V = -40\,nV}$$

• a) ¿ $\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$; $\int d\phi = -\int \mathcal{E}\, dt$?