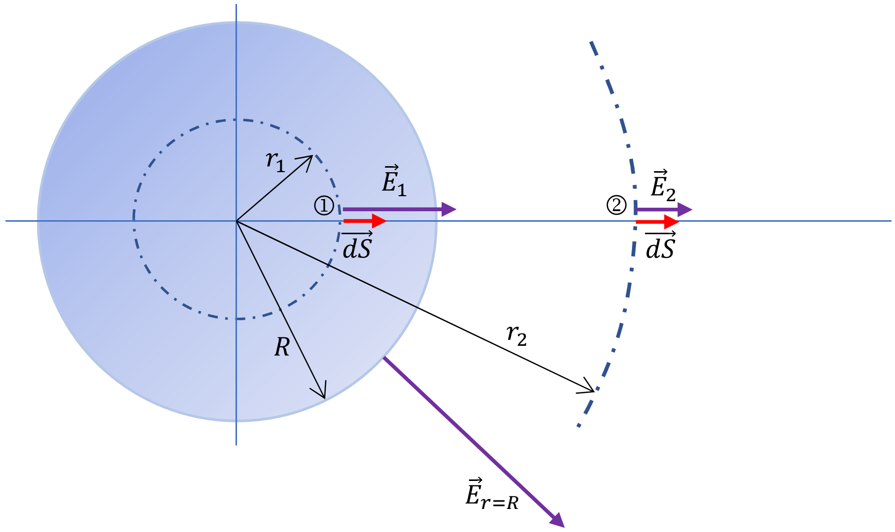
Suponiendo que una carga positiva está distribuida uniformemente en un volumen esférico de radio R = 10 cm, siendo la densidad de carga por unidad de volumen $\rho = \frac{3}{4\pi} \cdot 10^5 \; C/m^3$, calcule el campo y potencial creados en los siguientes puntos:

i) En un punto situado a r_1 = 5 cm.
ii) En un punto situado a r_2 = 20 cm del centro de la esfera.
iii) En un punto de la superficie de la esfera.



ii) En el punto ② $(r > R)$ aplicamos la ley de Gauss:

$$\phi_2 = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0} \rightarrow \phi_2 = \frac{\rho \cdot V}{\varepsilon_0} = \frac{\left(\frac{3}{4\pi} \cdot 10^5\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{\varepsilon_0} = \frac{10^5 \; R^3}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_2 = \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \oint E_2 \cdot dS \cdot cos0 = E_2 \oint dS = E_2 \, 4\pi \, r^2$$

Igualando expresiones de flujo:

$$E_2 \, 4\pi \, r^2 = \frac{10^5}{\varepsilon_0} \, R^3 \rightarrow E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{10^5 R^3}{r^2} \rightarrow E_2 = K 10^5 R^3 \, \frac{1}{r^2}$$

En $r_2 = 0{,}20 \; m$

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \; \frac{10^5 \cdot (0{,}10)^3}{0{,}20^2} \rightarrow E_2 = 2{,}25 \cdot 10^{13} \frac{N}{C} \rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = 2{,}25 \cdot 10^{13} \, \vec{u}_r \, \left(\frac{N}{C}\right)}$$

Para calcular el potencial:

$$V_2 = -\int E_2 dr \rightarrow V_2 = -\int K \; \frac{10^5 R^3}{r^2} dr = -K 10^5 R^3 \int r^{-2} dr = K 10^5 R^3 \; \frac{1}{r} + \mathbb{C}_\infty$$

Por convenio se toma cero como el potencial en el infinito, $\mathbb{C}_\infty = 0$

$$V_2 = K \; 10^5 R^3 \; \frac{1}{r}$$

En $r_2 = 0{,}20 \; m$

$$V_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^5 \cdot (0{,}10)^3 \; \frac{1}{0{,}20} \rightarrow \boxed{V_2 = 4{,}5 \cdot 10^{12} \; V}$$

i) En el punto ① $(r < R)$ aplicamos la ley de Gauss:

$$\phi_1 = \frac{Q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} \rightarrow dq = \rho\, dV = \rho\, 4\pi\, r^2\, dr \rightarrow q = \int \rho\, 4\pi\, r^2\, dr = \rho\, 4\pi \int_0^r r^2\, dr = \rho\, 4\pi\, \frac{r^3}{3} \rightarrow$$

$$q = \frac{3}{4\pi} \cdot 10^5 \cdot 4\pi\, \frac{r^3}{3} \rightarrow q = 10^5\, r^3$$

$$\phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{10^5}{\varepsilon_0}\ r^3$$

$$\phi_1 = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \oint E_1 \cdot dS \cdot cos0 = E_1 \oint dS = E_1\, 4\pi\, r^2$$

Igualando expresiones de flujo:

$$E_1\, 4\pi\, r^2 = \frac{10^5}{\varepsilon_0}\, r^3 \rightarrow E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{10^5 r^3}{r^2} \rightarrow E_1 = K\, 10^5\, r$$

En $r_1 = 0{,}05\ m$

$$E_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^5 \cdot 0{,}05 \rightarrow E_1 = 4{,}5 \cdot 10^{13}\ \frac{N}{C} \rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = 4{,}5 \cdot 10^{13}\ \vec{u}_r\ \left(\frac{N}{C}\right)}$$

Para calcular el potencial:

$$V_1 = -\int E_1 dr \rightarrow V_1 = -\int K\, 10^5\, rdr = -K\, 10^5 \int rdr = -K\, 10^5\, \frac{r^2}{2} + \mathbb{C}$$

Como el potencial es una función continua, en $r = R$: $V_1 = V_2$

$$-K\, 10^5\, \frac{R^2}{2} + \mathbb{C} = K\, 10^5 R^3\, \frac{1}{R} \rightarrow \mathbb{C} = \frac{3}{2}\, K\, 10^5 R^2 = \frac{3}{2}\, 9 \cdot 10^9 \cdot 10^5\ \cdot 0{,}1^2 \rightarrow \mathbb{C} = 1{,}35 \cdot 10^{13}\ V$$

Así, el potencial en ① queda:

$$V_1 = -K\, 10^5\, \frac{r^2}{2} + \mathbb{C} = -9 \cdot 10^9 \cdot 10^5 \cdot \frac{0{,}05^2}{2} + 1{,}35 \cdot 10^{13} \rightarrow \boxed{V_1 = 1{,}2375 \cdot 10^{13}\ V}$$

iii) En $r = R = 0{,}10\ m$

$$V_{r=R} = K\, 10^5 R^3\, \frac{1}{r} = K\, 10^5 R^2 \rightarrow V_{r=R} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^5\ \cdot 0{,}10^2 \rightarrow \boxed{V_{r=R} = 9 \cdot 10^{12}\ V}$$

$$E_{r=R} = K\, 10^5\, r = K\, 10^5\, R \rightarrow E_{r=R} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^5 \cdot 0{,}10 = 9 \cdot 10^{13}\, \frac{N}{C} \rightarrow \boxed{\vec{E}_{r=R} = 9 \cdot 10^{13}\ \vec{u}_r\ \left(\frac{N}{C}\right)}$$

Los gráficos **E**-r y **V**-r son los siguientes: