Un cilindro homogéneo de radio r y masa m rueda sin deslizar siguiendo una via en forma de lazo circular de radio R, como indica la figura. El cilindro parte del reposo en el punto P, a una altura h por encima de la parte inferior del lazo. Calcular:

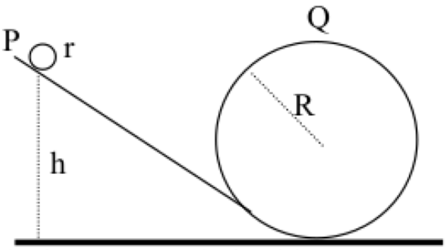
a) Su energía cinética cuando alcanza el punto Q (2,5 puntos).

b) Su aceleración centrípeta en dicho punto admitiendo que no se sale de la vía (2,5 puntos).

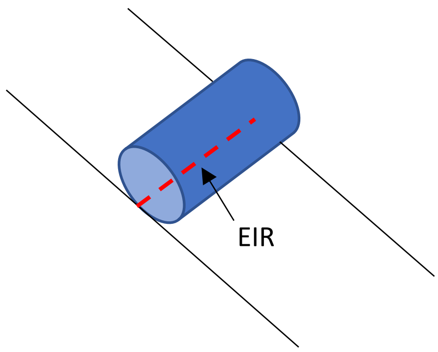
c) El mínimo valor de h para que el cilindro llegue a Q sin salirse de la vía (2,5 puntos).

Suponiendo que h es es mayor que ese valor mínimo:

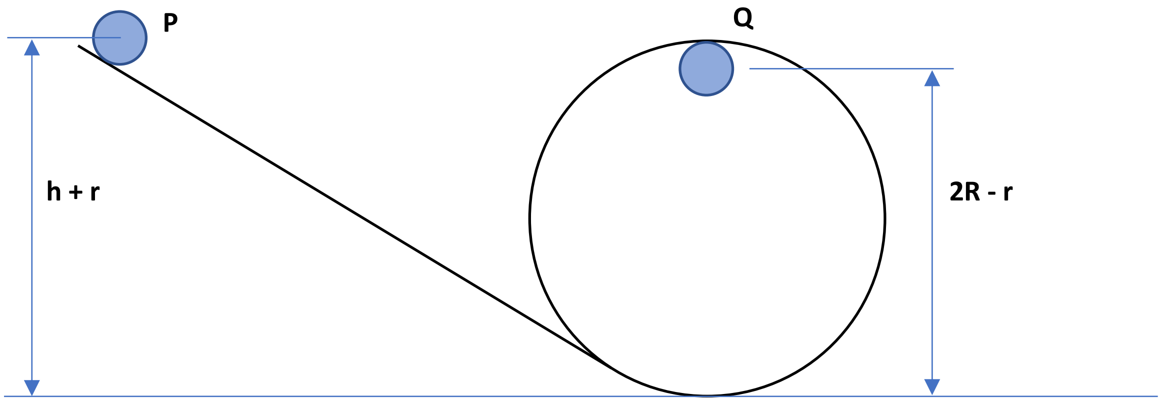
d) Obtener una expresión para la fuerza normal ejercida por la vía sobre el cilindro en el punto Q (2,5 puntos).



a) Como el cilindro rueda sin deslizar sobre la vía, quiere decir, que los puntos de la generatriz del cilindro que están en contacto con dicha vía tienen velocidad nula, y por tanto, esta generatriz es el eje instantáneo de rotación (EIR).



En este caso hay fuerza de rozamiento, pero según lo dicho, dicha fuerza no trabaja, y por tanto se puede aplicar conservación de energía mecánica.



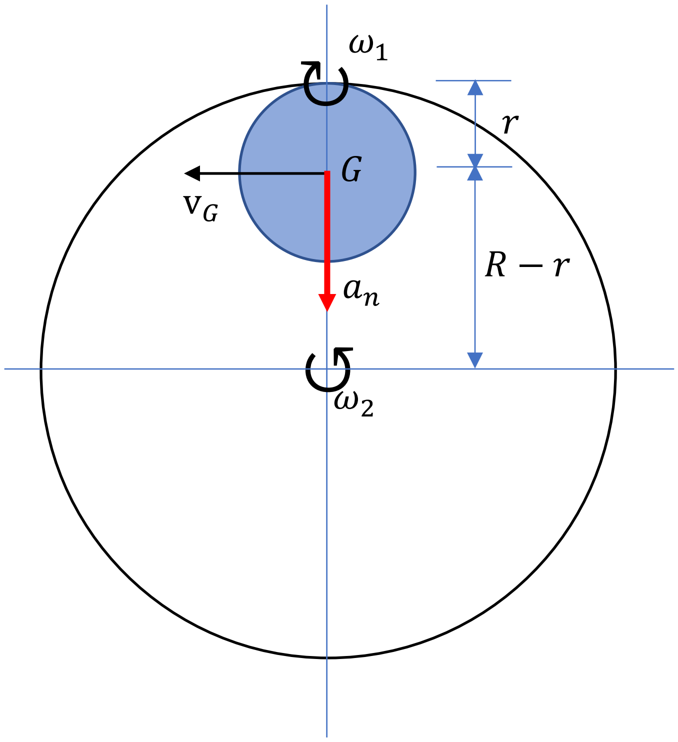
$$E_c(P) + E_p(P) = E_c(Q) + E_p(Q)$$

Tomando como nivel de referencia el suelo para el cálculo de energía potencial, se tiene:

$$0 + mg(h + r) = E_c(Q) + mg(2R - r) \rightarrow \boxed{E_c(Q) = mg(h + 2r - 2R)} \; [\,J\,]$$

b) Cálculo de la aceleración centrípeta en Q.

El cilindro gira sobre la generatriz de contacto con velocidad angular ω_1 ; además hay una velocidad angular ω_2 debido al movimiento circular en el lazo. Así, se tiene la siguiente figura:



La energía cinética del cilindro en Q es $E_c(Q) = mg(h + 2r - 2R)$ (**1**)

La energía cinética de un sólido rígido es:

$$E_c = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_G{}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}I_{EIR}\omega^2$$

Siendo $\omega = \omega_1$ y $I_{EIR} = I_G + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$

$$E_c = \frac{1}{2}I_{EIR}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\omega_1^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega_1^2 \text{ } (\mathbf{2})$$

Igualando ecuaciones (**1**) y (**2**):

$$mg(h + 2r - 2R) = \frac{3}{4}mr^2\omega_1^2 \rightarrow r^2\omega_1^2 = \frac{4}{3}g(h + 2r - 2R) \text{ } (\mathbf{3})$$

La velocidad en el centro del cilindro v_G es igual a:

$$\mathrm{v}_G = \omega_1 r = \omega_2(R - r) \rightarrow r^2\omega_1^2 = \omega_2^2 \cdot (R - r)^2 \text{ } (\mathbf{4})$$

La aceleración normal o centrípeta es:

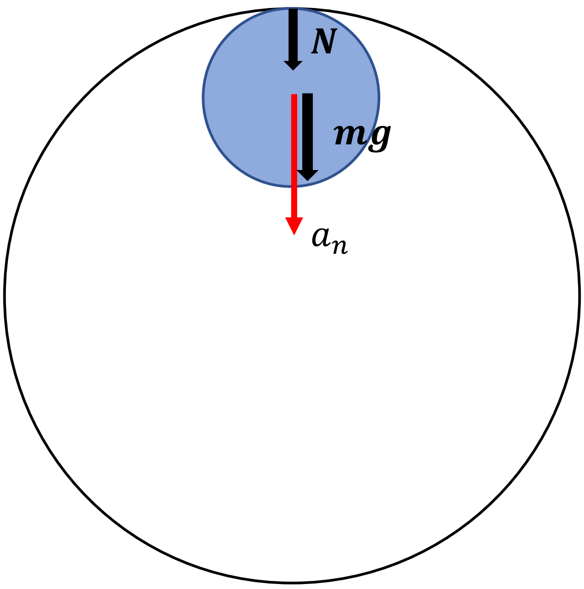
$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho} = \frac{(\omega\rho)^2}{\rho} = \omega^2\rho$$

Siendo ρ el radio de curvatura, en este caso: $\rho = R - r$; y $\omega = \omega_2$. Por tanto:

$a_n = \omega_2^2 \cdot (R - r)$. Combinando (**3**) y (**4**) para obtener ω_2 se tiene:

$$\boxed{a_n = \frac{4g(h + 2r - 2R)}{3(R - r)}} \quad [m/s^2]$$

c) El mínimo valor de **h** para que el cilindro llegue a Q sin salirse de la vía.



Al llegar al punto más alto, si hay contacto, existirá una fuerza normal (N) y el cilindro continuará su recorrido en contacto con el lazo.

En el límite, cuando arriba del todo la normal vale cero, se tiene:

$$mg = ma_n \rightarrow g = a_n$$

Utilizando a_n del apartado anterior:

$$g = \frac{4g(h + 2r - 2R)}{3(R - r)}$$

$$3(R - r) = 4(h + 2r - 2R)$$

$$3(R - r) = 4h + 8(r - R)$$

$$4h = 3(R - r) + 8(R - r) = 11(R - r)$$

$$\boxed{h_{min} = \frac{11}{4}(R - r)}\ [m]$$

d) Expresión de la fuerza normal (N):

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$mg + N = ma_n \rightarrow N = m(a_n - g) = m\left(\frac{4g(h + 2r - 2R)}{3(R - r)} - g\right) = mg\frac{4h + 8r - 8R - 3R + 3r}{3(R - r)}$$

$$\boxed{N = mg\frac{4h + 11r - 11R}{3(R - r)}}\ [N]$$