Procedimientos selectivos profesores secundaria La Rioja 2015, Física y Química.
Leandro Valdés Escalante. (cc.ff.profesorpoet@gmail.com)
Fecha: Enero – 2018.
Para cualquier duda ponerse en contacto con el mail reseñado.

Problema 3. (Enunciado aproximado – creo está con todos los datos necesarios)

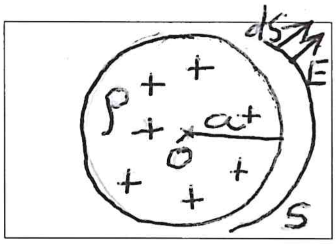
Sea una distribución esférica de carga de radio “a” y densidad volúmica de carga constante “ρ “. Calcular:

1. El potencial en todos los puntos dentro y fuera de la esfera de carga.

2. Haga una gráfica “E-r” y “V – r” (campos y potenciales eléctrostáticos, frente a la distancia al centro de la esfera).

Solución.

1. Es un ejercicio del tema de campo eléctrico. El potencial es una función escalar de la distancia al centro de la esfera. Para hallarlo, primero por lo que se verá después, es necesario encontrar la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$, que por el contrario es una función vectorial, en todo punto del espacio (dentro y fuera de la carga) relacionando ambos después.



Como la simetría del problema es bastante simple (esférica), y “E” solo depende de la coordenada “r”, podemos utilizar el teorema de Gauss, el cual nos dice, que el flujo ” Φ “ de cualquier campo (en este caso electrico) es igual a la carga total encerrada en la esfera dividida por la permitividad dieléctrica del medio en que está inmersa (en nuestro caso la del vacío ε_0) :

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

Así, si “encerramos” a nuestra esfera de radio “a”, en otra superficie esférica de radio “r” (distancia de cualquier punto r > a , incluido el propio punto “a”, el cual representa a la nube de carga esférica) y utilizamos entonces la forma integral del teorema:

$$\Phi = \int_S \vec{E}.d\vec{S} \qquad (2)$$

donde “S” representa una integral de área, que es otra definición del flujo eléctrico. El vector $d\vec{S}$ representa a un vector perpendicular a la “S” , y que es paralelo al vector campo eléctrico. Ahora, igualando (1) y (2) tenemos:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_S \vec{E}.d\vec{S} \qquad (3)$$

Integramos en (3) y sutituimos los datos que tenemos:

$\int_S \vec{E}.d\vec{S} = \int_S |E||dS|\cos\theta$ = { observamos que el vector campo y el vectos elemento de superficie son paralelos ==> $\cos\theta = 1$ } = => $|\vec{E}|\int_S |d\vec{S}| = ES$ (4)

donde ya sabemos que nos referimos a los módulos.

1. Campo para puntos fuera de la esfera: Cómo “a” es el radio de la esfera:

$$Q = \rho\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \text{ y por su parte } S = 4\pi r^2 \qquad (5)$$

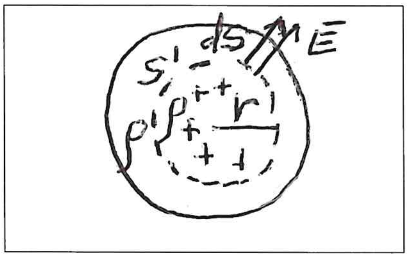
y lo llevamos todo a (3) y (4): $$\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = E(4\pi r^2) \qquad (6)$$

simplificando "r" y despejando "E": $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{r^2}\right) \quad \forall r \geq a$ (7) o en forma vectorial, si definimos un vector unitario $\vec{u}_r = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{r^2}\right)\vec{u}_r \quad (N\,C^{-1}) \quad \forall r \geq a} \qquad (8)$$

El campo eléctrico fuera de una distribución de carga , se comporta según vemos, como si toda la distribución equivaliese a una única carga puntual total "Q" , o sea, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

2. Campo para puntos interiores a la esfera:



El razonamiento va a ser análogo, pero hay una "pequeña" diferencia:

Al tomar una superficie de Gauss dentro de la esfera, la carga total que aparece en (3), ya no es "Q", pero sí lo es la densidad "ρ" , sino que si la esfera que tomamos dentro tiene radio "r" (que ahora representa a los puntos en que queremos encontrar el campo), la carga total dentro de la *esfera ficticia* "S' " será:

$$Q' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (9)$$

...y la superficie tampoco será ahora $4\pi a^2$ sino :

$$S' = 4\pi r^2 \qquad (10)$$

volviendo a tomar el teorema de Gauss con "S ' ", tendremos:

$$|\vec{E}|\,|S'| = E(4\pi r^2) \qquad (11)$$

$$\frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r^3 \rho = E(4\pi r^2) \qquad (12)$$

operando después de simplicar en "r":

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \quad (\mathrm{N\,C^{-1}}) \quad \forall r < a} \qquad (13)$$

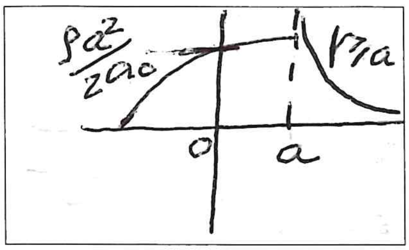
o bien en forma vectorial:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\vec{u}_r \quad (\mathrm{N\,C^{-1}}) \quad \forall r < a} \qquad (14)$$

Ahora ya estamos en condiciones de aplicar la relación entre el campo eléctrico y el potencial que crea. La forma de esta relación es bastante compleja desde el punto de vista matemático, pero como tenemos simetría esférica, la relación es extremadamente sencilla:

$$E = -\frac{dV}{dr} \qquad (15)$$

3. Potencial e.e.s. para puntos interiores a la esfera $r<a$ **:**



Vamos a integrar la fórmula (14) para este caso. Una carga "testigo" cualquiera viene desde el infinito (en r = - ∞ , V =0), y según dicha fórmula la diferencia de potencial entre el infinito y cualquier punto "r" en el interior será:

$$\Delta V = V(r=-\infty) - V(r<a) \qquad (16)$$

$$\Delta V = -\int_{-\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\left[\int_{-\infty}^{a} \vec{E}_f\cdot d\vec{l} + \int_{a}^{r} \vec{E}_i\cdot d\vec{l}\right] \qquad (17)$$

Una carga "testigo" , deberá efectuar un trabajo desde el infinito hasta el radio de la distribución, más un trabajo desde la superficie hasta el punto "r" dentro de la distribución "ρ" . El campo fuera E_f está dado por (8) y E_i por (13).

$\int_{-\infty}^{a} \vec{E_f} \cdot d\vec{l} = \int_{-\infty}^{a} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{r^2}\right) dl$ (nótese que cuando la carga viene desde el infinito, el campo fuera y el elemento $d\vec{l}$ tienen distinto signo según se ve en la figura y por tanto al efectuar el producto escalar, el ángulo entre ambos va a ser 180° ==> cos (180°) = -1.

$\int_{-\infty}^{a} \vec{E_f} \cdot d\vec{l} = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{a} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{-\infty}\right]$ ==> ..finalmente

$$\boxed{\int_{-\infty}^{a} \vec{E_f} \cdot d\vec{l} = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}} \qquad (18)$$

Ahora, calculamos la contribución al potencial durante la segunda trayectoria (dentro de la nube de carga):

$\int_{a}^{r} \vec{E_i} \cdot d\vec{l} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{a}^{r} r\,dr = -\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\frac{r^2 - a^2}{2}$ ==>

$$\boxed{\int_{a}^{r} \vec{E_i} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\right)(r^2 - a^2)} \qquad (19)$$

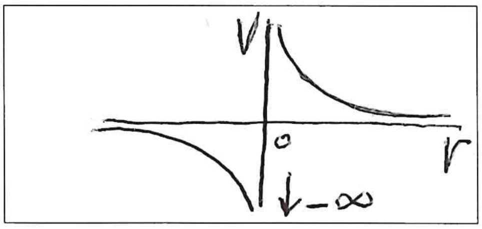
Sumemos ahora las dos contribuciones al potencial (superposición):

$$V(r) = \left[\int_{-\infty}^{a} \vec{E_f} \cdot d\vec{l} + \int_{a}^{r} \vec{E_i} \cdot d\vec{l}\right] = \left[\frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} - \left(\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\right)(r^2 - a^2)\right] \qquad (20)$$

..finalmente:

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{3a^2 - r^2}{2}\right]} \qquad (21)$$

4. Potencial e.e.s. para puntos exteriores de la esfera $r \geq a$:



Volvemos a integrar (17) , ahora para r > a:

$$\int_{0}^{V} dV = -\int_{-\infty}^{d} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{r^2}\right) dr \qquad (22)$$

(siendo "d" cualquier punto > "a")

$$V = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right) \qquad (23)$$

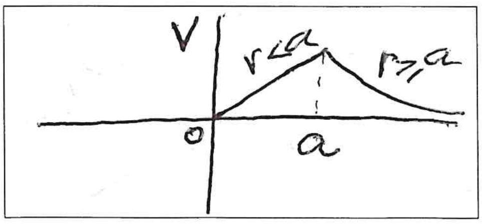
resultando finalmente:

$$\boxed{V = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 d} \; (\mathrm{N\,C^{-1}\,m^{-1}})} \qquad (24)$$

!!Idéntico al de una carga puntual con una carga $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$.

2. Representemos gráficamente todos los resultados:

a) Campos eléctricos.



b) Potenciales.